



الرياضيات المتخصصة

المناهج الدراسية السودانية



المرحلة الثانوية
الصف الثالث

+971544600874
info@ebttikarworld

أفضل موقع لخدمات طلاب الشهادة السودانية
www.ebtikarworld.com





التعليم الثانوي

الرياضيات المتخصصة

الكتاب الثاني

$$4 + 2 + 3 = (3)$$

الصف الثالث

بسم الله الرحمن الرحيم

جمهورية السودان

وزارة التعليم العام

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

الرياضيات

(الكتاب الثاني)

للفصل الثالث الثانوي

إعداد: لجنة بتكليف من المركز القومي للمناهج والبحث التربوي من الأساتذة:

الدكتور: عبد الغنى إبراهيم محمد - المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
الأستاذ : على محمد الجاك - المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
الدكتور: محسن حسن عبد الله هاشم - جامعة الخرطوم - كلية العلوم الرياضية
الأستاذ : محمد الحسن طه محمد - جامعة أم درمان الإسلامية

مراجعة :

الأستاذ : عبد السلام الشريف - مدير إدارة التدريب بوزارة التربية
الأستاذ : حسن عبد الغفور حسن - مدير إدارة التقويم التربوي بوزارة التربية
شارك في التنقيح : الدكتور : عبد الله محمود عبد المجيد - المركز القومي للمناهج
الأستاذ : عز الدين عثمان آدم - التوجيه الفني - ولاية الخرطوم
الإخراج الفني والتصميم : إبراهيم الفاضل الطاهر - المركز القومي للمناهج
تصميم الغلاف : مجدي محجوب فتح الرحمن - المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
الجمع بالحاسوب : إشراقه فرح شريف - المركز القومي للمناهج
: رقية الريح محمد إسماعيل - المركز القومي للمناهج
: عبد القادر موسى محمد - المركز القومي للمناهج

ISBN 978-99942-53-17-3 ريدمك

المحتويات

الصفحة	الموضوع
أ	□ المقدمة
	الوحدة الأولى : الدوال الحقيقية والنهايات
٣	□ تمهيد لحساب التفاضل والتكامل (الحساب)
٥	□ الدوال الحقيقية و النهايات
٥	□ التطبيق
٩	□ تركيبات الدوال
١٢	□ النهايات
٢١	□ النهايات للدوال الكسرية
٢٥	□ بعض النهايات الهامة
٣٣	□ الدوال المتصلة
	الوحدة الثانية : التفاضل
٤٣	□ التغير ومتوسط معدل التغير
٤٥	□ مشتقة الدالة
٥٠	□ ايجاد المشتقة الأولى لبعض الدوال
٥٤	□ القواعد الاساسية للتفاضل
٦٠	□ دالة الدالة
٦٣	□ تفاضل الدوال المعرفة ضمناً
٦٧	□ المشتقات العليا

الصفحة	الموضوع
	الوحدة الثالثة : تطبيقات على التفاضل
٧٣	□ تطبيقات على الهندسة التحليلية
٧٦	□ النهايات العظمى والصغرى
٩٠	□ تطبيقات في الميكانيكا
٩٢	□ المعدلات الزمنية المرتبطة
	الوحدة الرابعة: التكامل
١٠١	□ التكامل كعملية عكسية للتفاضل
١١٤	□ بعض طرق التكامل
	الوحدة الخامسة: التكامل المحدد وتطبيقاته
١٢٦	□ التكامل المحدد
١٢٧	□ بعض خواص التكامل المحدد
١٣١	□ المساحات
١٣٥	□ النظرية الأساسية للتكامل
	الوحدة السادسة: الدائرة
١٤٨	□ معادلة الدائرة
١٥١	□ الصورة العامة لمعادلة الدائرة
١٥٤	□ الدائرة التي تحقق شروطاً معينة
١٦٠	□ معادلة المماس لدائرة عند نقطة عليها
١٦٤	□ طول المماس المرسوم للدائرة من نقطة خارجها
	الوحدة السابعة : مجموعة الأعداد المركبة
١٦٩	□ التمثيل البياني والصورة القطبية للعدد المركب
١٧٧	□ بعض خواص الصورة القطبية للعدد المركب
١٨١	□ القوى ونظرية دي موافر
١٨٥	□ جذور الأعداد المركبة
١٩٢	□ حل معادلات الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد المركبة
١٩٦	□ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

المقدمة

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات ، والصلاة والسلام على اشرف خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وعلى آله واصحابه اجمعين .

أما بعد .

فاستكمالاً لمناهج المرحلة الثانوية ، يسعدنا أن نقدم لأبنائنا الطلاب كتاب الرياضيات المتخصصة للصف الثالث الثانوي- الكتاب الثاني- في إطار خطة التطوير التربوي للتعليم الثانوي من جانب ، وتمشياً مع التطور الكبير الذي حدث في محتوى مادة الرياضيات في النصف الأخير من القرن العشرين من جانب آخر ، هذا التطور الذي شمل طريقة عرضها وأسلوبها ولغتها. ولم تتح الفرصة لمناهج المرحلة الثانوية في السودان لمواكبته طوال الفترة الماضية ، لذا حاولنا أن يكون منهج الرياضيات بالسودان مواكباً لذلك التطور . ويشمل هذا المقرر المفاهيم التي تستكمل البناء الرأسي للمحتوى المعرفي الذي يجب أن يلم به الطالب وهو على أعتاب مرحلة التعليم العالي و ممارسة الحياة العملية والمشاركة الفاعلة في المجتمع .

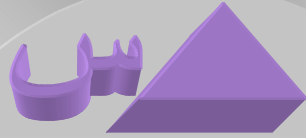
لقد تم إعداد هذا الكتاب ليشمل التفاضل والتكامل آخذين في الاعتبار أن يشمل كل المفاهيم التي يحتاجها الطالب لمواصلة دراسته في الكليات العلمية مثل : تفاضل وتكامل الدوال المثلثية وتطبيقات التفاضل والتكامل كالنهايات العظمى والصغرى والمساحات . بجانب اشتماله على معادلة الدائرة ومجموعة الأعداد المركبة .

لقد عرضت مادة الكتاب ؛ من خلال دروس تحوى كل منها فكرة واحدة، ويتوافر بكل درس عدد مناسب من الأمثلة والمسائل لتعميق التدريب في الصف ، أو تعطى على شكل واجب منزلى . وقد توخينا في هذا الكتاب ربط موضوعاته بموضوعات كتب الرياضيات للصفوف السابقة مع الاهتمام بالبرهان الرياضى للحقائق العلمية ومراعاة التوازن بين المفاهيم والمهارات آمليين أن نكون قد وفقنا في ذلك كله مرحبين بكل نقد بناء من الموجهين والمعلمين والطلاب وأولياء الامور لإثراء الكتاب وتطويره .

والله الموفق

المؤلفون

الوحدة الأولى



الدوال الحقيقية والنهيات

أهداف الوحدة الأولى

بعد دراسة هذه الوحدة نتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :-

- ١- يميّز الدالة العددية ويجد صورة العنصر بالتعويض .
- ٢- يجد مجال التعريف للدالة العددية .
- ٣- يجد قاعدة الدالة الناتجة من تركيب دالتين .
- ٤- يتعرّف مفهوم نهاية الدالة .
- ٥- يتعرّف المقادير غير المعينة في النهايات وطرق حلها .
- ٦- يجد نهاية الدالة كثيرة الحدود والدالة الكسرية التي كل من بسطها ومقامها كثيرة حدود .
- ٧- يجد نهاية الدالة التي على الصورة $\frac{s^n - a^n}{s - a}$ عندما $s \leftarrow a$.
- ٨- يجد نهاية الدوال جاس ، جتاس ، طاس ، $\frac{جاس}{س}$ وذلك عندما $s \leftarrow ٠$.
- ٩- يميّز بين الدوال المتصلة والغير متصلة عند فترة أو نقطة .

تمهيد لحساب التفاضل والتكامل (الحساب)

أطلق الرياضيون على حساب التفاضل والتكامل (الحساب) ، وهو علم دراسة التغيرات والحركة ، ويدخل في دراسة الكثير من الظواهر الطبيعية والاقتصادية والاجتماعية والنفسية . وله دور عظيم في تطوير الفيزياء والعلوم الهندسية ، كما يدخل في بناء النماذج الرياضية وفي مجالات شتى مثل إدارة الأعمال والطب والأحياء وحتى العلوم السياسية . لذلك يعتبر التفاضل والتكامل محور الرياضيات الأولية بسبب أفكاره وأساليبه وتطبيقاته .

ولم تظهر فكرة التفاضل والتكامل حديثاً - في القرن السابع عشر كما يعتقد معظم الرياضيين لكنها ظهرت قبل الميلاد عندما استخدم الاغريق فكرة التكامل عند ايجادهم للمساحة المحددة بمنحنيات .

ويقال أن ثابت بن قرة (٨٢٦ - ٩٠١) م - وهو من علماء المسلمين - وضع أساس علم التفاضل . فقد تمكن من إيجاد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره .

ولم يكن التفاضل والتكامل في ذلك الوقت علماً منفصلاً بذاته بل كان جزءاً من علم الجبر إلى أن جاء كل من العالم الانجليزي اسحق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) م والفيلسوف الألماني جوتفرد ليبنتز (١٦٤٦ - ١٧١٦) م واكتشف كل منهما مستقلاً عن الآخر علم التفاضل والتكامل . وكان هذا الاكتشاف بداية لعصر جديد في العلوم والرياضيات .

وكتب ليبنتز أول كتاب في هذا العلم عام ١٦٨٤م ونشر عام ١٦٩٣م . كما قام نفس العالم بنشر مقالات عن الحساب المجموعى ثم عدل العنوان في عام ١٦٩٦م إلى حساب التفاضل . وهو الذى وضع الرموز المختلفة لهذا العلم مثل : د (س) ، د س ، [.

أما إسحق نيوتن فقد توصل إلى حساب التفاضل والتكامل في بحثه عن حلول لمسائل في الفيزياء والفلك . وقد تمكن من استخدامه في وصف حركة الكواكب حول الشمس .

وقد أثبت علم التفاضل والتكامل وعلم الهندسة التحليلية أنهما وسيلتان لهما قوة مذهلة وقدرة فائقة على حل حشد كبير من المسائل والمشكلات التى كانت محيرة وتبدو غير قابلة للحل في ذلك الوقت .

ونسبة لهذه الخصائص المميزة لعلم التفاضل والتكامل ، فقد جذب إليه الكثير من الرياضيين والباحثين ، مثل العالم الالماني اويلر (١٧٠٧ - ١٧٨٣) م ، الذى بحث في كل ميادين الرياضيات الموجودة في عصره وركز في أبحاثه على التفاضل والتكامل حيث قدم التفاضل الجزئى وحساب التغير وتطبيقاتها . أما العالم لويس لاجرانج (١٧٣٦ - ١٨١٣) م فقد ساهم في تطوير جميع فروع الرياضيات بالإضافة إلى تطويره لحساب التفاضل والتكامل .

وشهد القرن التاسع عشر تقدماً عظيماً في التحليل الرياضى (التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية) ، ففي عام ١٨٢١م اكتشف العالم كوشى (١٧٨٩ - ١٨٥٧) م نظرية النهايات ، وعرف بعض المفاهيم الأساسية مثل التقارب والتباعد والتكامل المحدد باستخدام النهايات .

أما العالم الالماني ريمان (١٨٢٦ - ١٨٦٦) م فقد اكتشف التكامل الريمانى .

ويتميز القرن العشرين بانطلاقة واسعة في مجال التطبيق العملى لمعظم فروع الرياضيات - رغم طبيعتها التجريدية - ومن بينها الحسبان الذي قال عنه الرياضى المشهور جون طون نيومان (١٩٠٣ - ١٩٥٧) م " الحسبان هو أول انجاز في الرياضيات الحديثة " .

ونبدأ دراستنا للحسبان بتعرّف الدوال الحقيقية والنهايات لصلتها الوثيقة بحساب التفاضل والتكامل ونتعرض بشئ من التفصيل لمفهوم التفاضل وقواعده الأساسية وتطبيقاته ، ومن ثم نتناول مفهوم التكامل كعملية عكسية للتفاضل ونختتم دراستنا للحسبان التى تشمل الفصول الخمسة الأولى من هذا الكتاب بتعرّف التكامل المحدد وتطبيقاته .

(١) الدوال الحقيقية و النهايات

(١ - ١) التطبيق (الدالة) :

درسنا في مقرر الصف الأول ، وبشيء من التفصيل التطبيقات (الدوال).
تعرف الدالة على أنها علاقة من مجموعة غير خالية S إلى مجموعة غير خالية
 V يقترن فيها كل عنصر في S بعنصر واحد فقط من V .
وإذا رمزنا للدالة بالرمز d فإننا نعبر عن ذلك عادة بـ :

$$d : S \rightarrow V$$

S تسمى مجال الدالة d و V المجال المصاحب للدالة

$$\text{أو : } d = (S \rightarrow V) , S \ni s , V \ni v$$

ونقول إن المتغير v دالة في المتغير s . يسمى s بالمتغير المستقل و
 v بالمتغير التابع .

وفي دراستنا للحساب سنهتم بدراسة ارتباط المتغيرات بعضها ببعض ،
مثلاً نريد أن نعرف العلاقة التي تربط المسافة التي يقطعها جسم ما بسرعته ، أو
نعرف علاقة نصف قطر الكرة بحجمها أو مساحة سطحها ، أو تركيز الدواء في
دم الإنسان بالفترات بين تناول الجرعات ، وهكذا .

وستقتصر دراستنا في الحساب على الدوال الحقيقية ، وهي الدوال التي
يكون مجالها ومجالها المقابل مجموعتين جزئيتين من مجموعة الأعداد الحقيقية R .
وتمثل قاعدة الدالة في أغلب الأحيان بتتابع عمليات حسابية نجريها على
عنصر s من المجال S لنصل إلى صورته v في المجال المقابل V .

$$\text{فصورة العنصر } 3 \text{ وفق الدالة } d (s) = s^2 + 2s$$

$$\text{هي } d(3) = 3^2 + 2 \times 3 = 15$$

$$\text{وصورة العنصر } 2^- \text{ بالدالة } v = h(s) = \frac{s^2 + 1}{1 - s} \quad (s \neq 1)$$

$$1 = \frac{3-}{3-} = \frac{1+(2-)\times 2}{1-2-} = (2-) \text{ هـ}$$

مثال (١) :

$$\text{إذا كان ص} = \text{د (س)} = \text{س}^2 - 5 \text{ فجد :}$$

$$\text{د (٣) ، د (٥) ، د (٤ + و)}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \text{د (٣)} &= 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4 \\ \text{د (٥)} &= 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20 \\ \text{د (٤ + و)} &= (4 + و)^2 - 5 = 16 + 8و + و^2 - 5 = 11 + 8و + و^2 \end{aligned}$$

مجال التعريف للدالة الحقيقية :

فيما يلي بعض الأمثلة للدوال الحقيقية :

$$\begin{aligned} \text{ص} &= \text{د (س)} = \text{س}^2 + 1 \\ \text{ص} &= \text{هـ (س)} = \sqrt{2\text{س} + 1} \\ \text{ص} &= \text{ر (هـ)} = \text{جا}^2 \text{ هـ} \\ \text{ص} &= \text{د (س)} = \frac{2\text{س}^3 + 1}{3\text{س} + 1} \end{aligned}$$

فإذا أعطيت الدالة دون تحديد لمجالها ومجالها المقابل فيكون مجالها في هذه الحالة جميع قيم المتغير التي يمكن حساب صورتها وفق قاعدة الدالة . تسمى هذه المجموعة عادة مجال تعريف الدالة ، أو مجموعة التعريف للدالة . أما المجال المقابل فهو المجموعة ح كاملة .

فالدالة $\text{ص} = \text{د (س)} = \text{س}^2 + 1$ معرفة لكل عدد حقيقي س فمجال تعريفها هو ح كاملة . وكل دالة في صورة كثيرة حدود يكون مجال تعريفها ح . أما الدالة :

$$\text{ص} = \text{هـ} (س) = \sqrt{1 - 2س} \text{ فهي معرفة لكل قيم } س \text{ التي تحقق}$$

$$0 \leq 1 - 2س \leq \frac{1}{4}$$

∴ مجال تعريف هذه الدالة هو المجموعة $\{س : س \leq \frac{1}{4}, س \geq 0\}$

لاحظ أنه إذا كانت الدالة جذرية يكون مجال تعريفها كل عدد حقيقي يجعل ما داخل الجذر غير سالب . أما إذا كانت الدالة كسرية فمجال تعريفها كل الأعداد الحقيقية عدا تلك التي تجعل المقام صفراً .

مثال (٢) :

جد مجال تعريف كل من الدوال التالية :

$$(أ) د (س) = \frac{1}{س}$$

$$(ب) ر (س) = \sqrt{3 - س}$$

$$(ج) ق (هـ) = ظا هـ$$

الحل :

$$(أ) د (س) = \frac{1}{س} \text{ هذه الدالة معرفة عند كل قيمة}$$

$$\text{إلا عندما } س = 0 \text{ ح}$$

$$\therefore \text{مجال تعريفها} = - \{0\}$$

$$(ب) ر (س) = \sqrt{3 - س}$$

ر معرفة لكل قيم س التي تحقق

$$0 \leq 3 - س \leq 3$$

$$\therefore \text{مجال تعريف الدالة} = \{س : س \leq 3, س \geq 0\}$$

$$(ج) ق (هـ) = ظا هـ$$

$$\frac{\text{جا ه}}{\text{جتا ه}} = \text{وبما أن ظا ه}$$

. مجال تعريف الدالة هي كل قيمة للمتغير ه عدا قيم ه التي عندها جتا ه = ٠
أى مجال التعريف =

$$\text{ح} - \left\{ \frac{\pi}{2} \pm , \frac{\pi 3}{2} \pm , \frac{\pi 5}{2} \pm , \dots \right\}$$

تمرين (١ - ١)

(١) إذا كان ص = د (س) = س^٢ - ٣ س + ٥ فجد :

$$\text{د (٠) , د (٢) , د (-\frac{1}{2})}$$

$$\text{د (٣ أ) , د (س^٢) , د (س + أ) , د (د (٢)) .}$$

(٢) إذا كان د (س) = $\frac{١ - س}{٢ س + ٢}$ فجد :

$$\text{د (٠) , د (١ -) , د (٢ و) , د (\frac{1}{س}) , د (س + و) .}$$

(٣) جد مجال تعريف الدوال التالية :

$$\text{(أ) ص = د (س) = } \frac{٥}{١ - س}$$

$$\text{(ب) ص = د (س) = } \frac{٣}{٩ - س^٢}$$

$$\text{(ج) ه = د (س) = س^٢ + ٥ س}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5+l}} = (ل) د = ص$$

$$\frac{s^2}{\sqrt{s^2 - 4}} = (س) = هـ$$

$$(و) ق(س) = ظتا س$$

$$(٤) إذا كانت د (س) = أ س + ب فجد :$$

$$\frac{د (س + و) - د (س)}{و} \text{ حيث } و \neq ٠$$

(٥) قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٢٠٠٠ متر . فإذا كان طولها يساوى س متراً فعبّر رمزياً عن الدالة د التى تربط بين المساحة ص والطول س . ما مجال تعريف المتغير س ؟

(٦) إذا سقط جسم من ارتفاع ٥٧٦ قدماً فوق سطح الأرض ، فإنه بعد مضي ن ثانية يكون ارتفاع الجسم عن سطح الأرض مقدراً بالأقدام مساوياً لـ :
 $ف = د (ن) = ١٦ - ٥٧٦ ن$

$$(أ) أحسب كلا من د $\left(\frac{٣}{٢}\right)$ ، د (٦) .$$

(ب) بعد كم من الزمن يكون الجسم على ارتفاع ٣٢٠ قدماً عن سطح الأرض .

(١ - ٢) تركيبات الدوال :

لتكن د ، هـ الدالتين المعرفتين بـ :

$$د (س) = س^٢ ، هـ (س) = ٣ س + ١$$

فالعبارة $س^٢ + ٣ س + ١$ المكونة من حاصل جمع د (س) ، هـ (س) .

تعرف دالة الثالثة ق (س) حيث :
 ق (س) = د (س) + هـ (س) = س^٢ + س^٣ + ١
 الدالة ق تسمى حاصل جمع الدالتين د ، هـ ويرمز لها بالرمز (د + هـ)
 ويكون :

$$\begin{aligned} \text{ق (س)} &= \text{د (س)} + \text{هـ (س)} = (\text{س} + \text{د}) (\text{س}) \\ \text{مثلاً : ق (٢)} &= \text{د (٢)} + \text{هـ (٢)} = ٢ + ٢ \times ٣ + ١ = ١١ \\ \text{وبنفس الطريقة يمكن تعريف الفرق بين أى دالتين د ، هـ أو حاصل} \\ \text{الضرب أو القسمة أو تركيب دالتين (دالة الدالة) كالآتي :} \\ \text{ر (س)} &= (\text{س} - \text{د}) (\text{س}) = \text{د (س)} - \text{هـ (س)} \\ \text{ت (س)} &= (\text{س} \cdot \text{د}) (\text{س}) = \text{د (س)} \cdot \text{هـ (س)} \\ \text{و (س)} &= \frac{\text{د (س)}}{\text{هـ (س)}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}} (\text{س}) \\ \text{د هـ (س)} &= (\text{س} \cdot \text{هـ}) (\text{س}) \end{aligned}$$

وفي كل حالة عدا الحالة الأخيرة يكون مجال الدالة الناتجة هو تقاطع
 مجالى الدالتين د ، هـ أما دالة خارج القسمة فلا تكون معرفة عند أى قيمة لـ س إذا
 كان المقام هـ (س) يساوى صفراً . وفي الحالة الأخيرة يكون مجموعة التعريف
 هى مجموعة تعريف الدالة هـ ، التى عندها هـ (س) تقع في مجموعة تعريف د
 (س) .

مثال (١) :

$$\begin{aligned} \text{إذا كان د (س)} &= \text{س}^٣ ، \text{هـ (س)} = \text{س}^٢ - ١ \text{ فإن :} \\ \text{ق (س)} &= (\text{س} + \text{د}) (\text{س}) = \text{د (س)} + \text{هـ (س)} \\ &= \text{س}^٣ + \text{س}^٢ - ١ \\ \text{ر (س)} &= (\text{س} - \text{د}) (\text{س}) = \text{د (س)} - \text{هـ (س)} \\ &= \text{س}^٣ - \text{س}^٢ + ١ \\ \text{ل (س)} &= (\text{س} \cdot \text{د}) (\text{س}) = \text{د (س)} \cdot \text{هـ (س)} \\ &= \text{س}^٣ (\text{س}^٢ - ١) = \text{س}^٥ - \text{س}^٣ \\ \text{م (س)} &= \frac{\text{د}}{\text{هـ}} (\text{س}) = \frac{\text{د (س)}}{\text{هـ (س)}} = \frac{\text{س}^٣}{\text{س}^٢ - ١} \end{aligned}$$

$$د (هـ (س)) = د (٢ س - ١) = (٢ س - ١)^٢$$

$$هـ (د (٢)) = هـ (٢٢) = هـ (٨) = ١٥ = ١ - ٨ \times ٢$$

تمرين (١ - ٢)

$$(١) \text{ إذا كانت د (س) = } ٣ - ٢ س, \text{ هـ (س) = } ١ + ٢ س^٢ \text{ جد : (أ) (د + هـ) (٢), (ب) (د - هـ) (٢), (ج) } \frac{د}{هـ}$$

$$(٢) \text{ إذا كانت د (س) = } ٤ س - ٣, \text{ هـ (س) = } ٥ س - ٢ س^٢ + ١ \text{ جد :}$$

$$(أ) د + هـ \quad (ب) د - هـ \quad (ج) د \cdot هـ \quad (د) \frac{د}{هـ}$$

$$(٣) \text{ إذا كانت د (س) = } ٣ س - ٢ س^٢ \text{ س جد كلاً من الدوال التالية :}$$

$$(أ) ق (س) = د (د (س)) \quad (ب) هـ (س) = \sqrt{\frac{د (س)}{د (س)}}$$

$$(ج) ر (س) = \frac{د (س) - د (٦)}{٦ - س}$$

$$(٤) \text{ إذا كان د (س) = } ٢ س^٢, \text{ هـ (س) = جاس} \text{ جد : (أ) (د + هـ) (س), (ب) (د - هـ) (س), (ج) (د + هـ) (س), (د) (د - هـ) (س)}$$

(١ - ٣) النهايات :

في هذا الفصل نتناول مفهوم ومعنى النهايات والتي لاغنى عنها لدراسة الموضوع الرئيس في هذا الكتاب موضوع التفاضل والتكامل . ونمهد للنهايات بالمثال التالي :

$$\text{اعتبر الدالة} \quad \text{ص} = \text{د} (\text{س}) = \frac{٢ \text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{٢ - \text{س}}$$

نلاحظ أننا نستطيع إيجاد قيمة د (س) عند أى قيمة حقيقية للمتغير س ما عدا القيمة س = ٢ ، إذ أن التعويض بالعدد ٢ في د (س) يعطينا د (٢) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهذا ليس عدداً حقيقياً معرفاً .

ما سنبحثه في هذا الفصل هو : إذا كان من المستحيل إيجاد قيمة د(س) عندما س = ٢ فما هى أقرب قيمة تأخذها د (س) عندما تكون س أقرب ما يمكن من العدد ٢؟ أى ما هى القيمة التى تقترب منها د (س) عندما تكون س قريبة جداً من ٢ ؟

بالنسبة لهذا المثال نلاحظ أن :

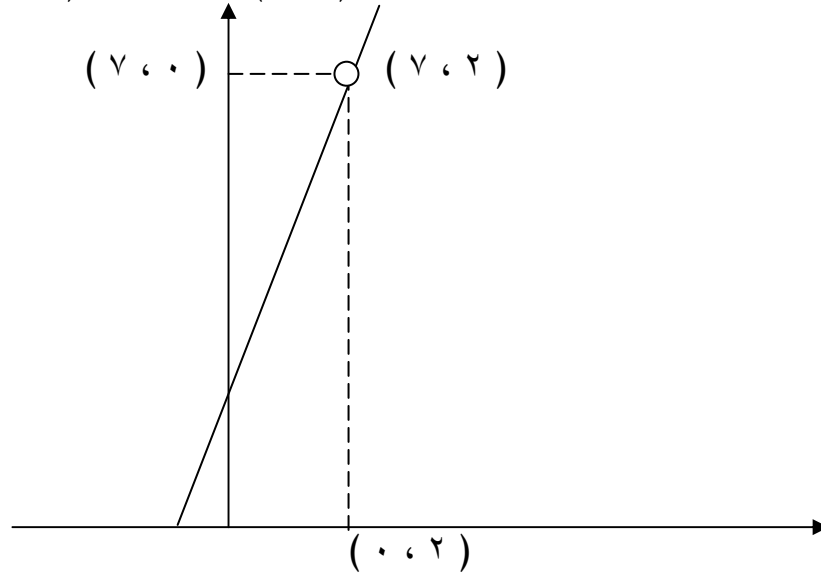
$$\text{د} (\text{س}) = \frac{٢ \text{س}^٢ - \text{س} - ٦}{٢ - \text{س}}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٢) (٢ + \text{س})}{٢ - \text{س}}$$

بشرط س ≠ ٢

هذا يعنى أن الدالة د (س) تساوى الدالة د (٢ + س) لكل قيم س عدا س = ٢ . فمن الناحية الهندسية فإن الشكل البياني للدالة د (س) هو

المستقيم $s = 2 + 3$ محذوفاً منه النقطة $(7, 2)$. أنظر الشكل (١ - ١) .



الشكل (١ - ١)

ومن الشكل إذا اقتربت s من العدد ٢ فإن d (s) تكون قريبة جداً من العدد ٧ . يوضح ذلك الجدول (١ - ١) والجدول (٢ - ١) ، حيث حسبنا قيم d (s) المناظرة لبعض قيم s التي تقترب شيئاً فشيئاً من العدد ٢ .
ففي الجدول (١ - ١) تقترب s من العدد ٢ من اليمين ونرمز لذلك بالرمز $s \leftarrow 2^+$.

وفي الجدول (٢ - ١) تقترب s من ٢ من اليسار ونرمز لذلك بالرمز $s \leftarrow 2^-$.

د (س)	س
٥	١
٦	١,٥
٦,٨	١,٩
٦,٩٨	١,٩٩
٦,٩٩٨	١,٩٩٩
٦,٩٩٩٨	١,٩٩٩٩
٦,٩٩٩٩٨	١,٩٩٩٩٩
↓	↓
٧	٢

د (س)	س
٩	٣
٨	٢,٥
٧,٢	٢,١
٧,٠٢	٢,٠١
٧,٠٠٢	٢,٠٠١
٧,٠٠٠٢	٢,٠٠٠١
٧,٠٠٠٠٢	٢,٠٠٠٠١
↓	↓
٧	٢

جدول رقم (١ - ٢)

الاقتراب من ٢ من اليسار .

فالعدد ٧ هو العدد الذي تقترب منه د (س) عندما تكون س قريبة من العدد ٢ . نعبر عن هذا رمزياً كالآتي :

$$\lim_{s \rightarrow 2^-} d(s) = 7$$

ونقرأ : نهاية الدالة د (س) عندما تؤول س إلى ٢ تساوى ٧ .

ويلاحظ أننا نستطيع أن نجعل الفرق المطلق بين د (س) والعدد ٧ أقل من أى عدد نختاره مهما كان هذا العدد صغيراً ، وذلك بجعل الفرق المطلق بين س والعدد ٢ صغيراً صغيراً كافياً . فمثلاً إذا أردنا أن نجعل الفرق المطلق | د (س) - ٧ | أقل من ٠,٠٠٢ ، يكفي أن نجعل الفرق المطلق | س - ٢ | أقل من ٠,٠٠١ . كما يتضح من السطر الخامس من الجدولين (١ - ١) و (٢ - ١) .

وبصفة عامة يمكن أن نصل إلى التعريف التالي :-

تعريف :-

إذا كان لدينا دالة $v = d(s)$ وكان a عدداً حقيقياً لا يشترط أن يكون في مجال تعريف الدالة فإن التعبير :

$$\lim_{s \rightarrow a} d(s) = l$$

يعنى أن $d(s)$ تقترب من العدد l كلما اقتربت s من العدد a بحيث يمكن جعل الفرق المطلق $|d(s) - l|$ صغيراً كيفما نشاء بجعل الفرق المطلق $|s - a|$ صغيراً صغيراً كافياً .

تقترب من a لا دخل له بالقيمة $d(a)$. ففي المثال التمهيدى السابق كان للنهاية قيمة حقيقية تساوى 7 بينما الدالة نفسها غير معرفة عند $s = 2$. فهناك حالات تكون فيها $d(a)$ غير معرفة ولكن $d(s)$ موجودة

بينما هنالك حالات فيها $d(a)$ معرفة ولكن $d(s)$ غير موجودة أو إن وجدت لا تساوى $d(a)$. وفي بعض الحالات تكون $d(a)$ موجودة وتساوى $d(s)$.

وجود النهاية $d(a)$ (s) يقتضى أن تساوى عدداً حقيقياً معيناً . أمّا

إذا كانت هذه النهاية لها أكثر من قيمة مختلفة أو كانت أكبر من أى عدد يمكن أن نتصوره فإننا نقول إن النهاية ليس لها وجود . وقد اتفق على كتابتها على النحو التالى :

$$\lim_{s \rightarrow a} d(s) = \infty$$

إذا كانت ليس لها قيمة محدودة

مثال (١) :

إذا كان :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + ١ ، \text{س} > ١ \\ \text{س} + ٥ ، \text{س} \leq ١ \end{array} \right\} \text{د (س)} =$$

فإن :

نها د (س) غير موجودة .
س_١ -

وذلك لأنه إذا اقتربت س من ١ من جهة اليمين فإن قيمة الدالة تقترب من ٧ أما إذا اقتربت س من ١ من جهة اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من ٢ .
(لاحظ أن قيمة د (١) = ٧ معرفة) .

مثال (٢) :

إذا كانت

$$\frac{١}{\text{س} + ٢} = \text{د (س)}$$

$$\text{فإن نها س-} \frac{١}{\text{س} + ٢} = \infty$$

أى غير موجودة وذلك لأنه كلما اقتربت س من ٢- شيئاً فشيئاً تزداد قيمة د (س) عددياً بصورة غير محدودة .

من الأمثلة التمهيدية السابقة يتضح لنا أنه ليس هنالك علاقة بين قيمة الدالة د (س) عند أ وبين نها د (س) ، فقد تكون الدالة معرفة عند أ

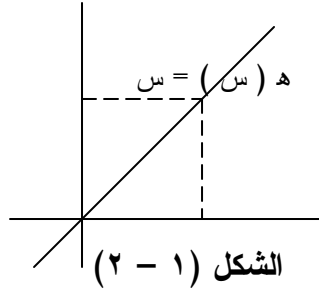
وليس لها نهاية عندما تؤول س إلى أ ، كما قد تكون الدالة غير معرفة عند أ بينما تؤول فيها إلى نهاية محددة عند اقتراب س من أ .

ويمكننا التوصل إلى بعض النظريات أو القواعد التى تساعدنا على إيجاد النهاية بصورة سريعة دون أن نلجأ إلى طريقة الرسم أو تكوين الجداول .

فالدالة الثابتة د (س) = ٣ مثلاً لا تتغير قيمة د (س) بتغير قيم س وهذا يعنى أن :

$$\text{نها د (س)} = ٣ \text{ لأى عدد حقيقى أ}$$

وكذلك الدالة $h(s) = s$. فإذا كوّننا الجدول أو رسمنا منحنى هذه الدالة (شكل (١ - ٢)) نجد أن قيمة $h(s)$ عندما تقترب قيمة s من أى عدد حقيقي a هي :
 $s \rightarrow a$ نها $s = a$

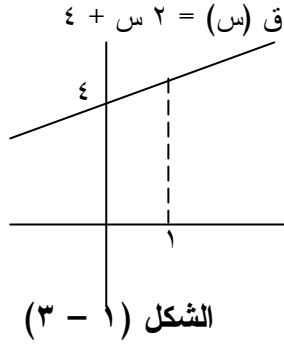


وكذلك إذا رسمنا منحنى الدالة :

$$q(s) = 2s + 4$$

وبحثنا عن نها $q(s)$ نلاحظ :

من الرسم (شكل (١ - ٣)) أن :
 $s \rightarrow a$ نها $q(s) = 2a + 4$



لاحظ أن نها $q(s) = 2a + 4$ وأن نها $s = a$

من الأمثلة السابقة يمكننا التوصل إلى النظرية التالية :
نظرية (١ - ١) :

- (١) إذا كان $d(s) = j$ حيث j عدد حقيقي فإن نها $d(s) = j$ لأي $s \rightarrow a$ عدد حقيقي a .
- (٢) إذا كان $q(s) = s$ فإن نها $q(s) = a$ لأي عدد حقيقي a .
- (٣) وإذا كان $h(s) = m s + a$ فإن نها $h(s) = m a + a$ لأي عدد حقيقي a .

مثال (٣) :

إذا كان هـ (س) = س + ٥ جد :

$$(أ) \text{ ٣ هـ (س) } \quad (ب) \text{ ٣ هـ (س) } \quad (ج) \text{ ٣ هـ (س) } \quad (د) \text{ ٣ هـ (س) }$$

الحل :

$$(أ) \text{ ٣ هـ (س) } = (س + ٥) \text{ ٣ هـ (س) } = ١٥ + س$$

$$(ب) \text{ ٣ هـ (س) } = (س + ٥) \text{ ٣ هـ (س) } = ١٥ + س$$

$$(ج) \text{ ٣ هـ (س) } = (س + ٥) \text{ ٣ هـ (س) } = ١٥ + س$$

مثال (٤) :

إذا كان ق (س) = س^٢

هـ (س) = س + ١ ، جد :

$$(أ) \text{ ق (س) } \times \text{ هـ (س) } = (س + ١) \text{ ق (س) }$$

$$(ب) \text{ ق (س) } \times \text{ هـ (س) } = (س + ١) \text{ ق (س) }$$

$$(ج) \text{ ق (س) } \times \text{ هـ (س) } = (س + ١) \text{ ق (س) }$$

الحل :

$$(أ) \text{ قاعدة ق (س) } \times \text{ هـ (س) } = (س + ١) \text{ ق (س) } = س^٢ + س$$

$$(ب) \text{ ق (س) } \times \text{ هـ (س) } = (س + ١) \text{ ق (س) } = س^٢ + س$$

$$(ج) \text{ ق (س) } \times \text{ هـ (س) } = (س + ١) \text{ ق (س) } = س^٢ + س$$

من الأمثلة السابقة يمكننا التوصل إلى النظرية التالية :
نظرية (١ - ٢) :

إذا كانت نها ق (س) = ل ، نها هـ (س) = ك
وكان ج و ن عددين حقيقيين ثابتين فإن :

(١) نها (ق (س) ± هـ (س)) = نها ق (س) ± نها هـ (س)
ل ± ك =

(٢) نها ج ق (س) = ج نها ق (س) = ج ل

(٣) نها (ق (س) · هـ (س)) = نها ق (س) · نها هـ (س) = ل ك

(٤) نها $\frac{ق (س)}{هـ (س)}$ = $\frac{نها ق (س)}{نها هـ (س)}$ (ك ≠ ٠)

(٥) نها (ق (س) · ل) = ل نها ق (س) = ل ك

مثال (٥) :

إذا كان د (س) = س^٢ - ٣س + ٥ ، جد :

(أ) د (٢-) (ب) نها د (س)

الحل :

(أ) د (٢-) = (٢-)² - ٣(٢-) + ٥ = ٤ - ٦ + ٥ = ٣

(ب) نها (س² - ٣س + ٥) = نها س² - ٣ نها س + نها ٥ = ٤ - ٦ + ٥ = ٣

$15 = 5 + 6 + 4 = 5 + 2 - \times 3 - 4 =$
 لاحظ أن نهاد $(س)$ د $(2-)$

يمكننا التوصل إلى القاعدة التالية :

إذا كان ق (س) كثيرة حدود من الدرجة ن ، حيث :

$$ق (س) = م_{س_1} س_1 + م_{س_2} س_2 + + م_{س_n} س_n + م_0$$

فإن نها ق (س) = ق (أ)

تمرین (۱ - ۳)

(١) استخدم نظريات النهايات لايجاد نهاية كل من الدوال التالية:

(ا) نہا ۱۳
س ← ۳۷

(ب) نہا (۴ س + ۳)
س ← ۱۰

(ج) $\left(\underset{\leftarrow}{س} ۲ س ۲ + ۵ س \right) (س ۳ + ۱)$

(۲) إذا علمت أن نها_د (س) = ۵ ، نها_س (س) = ۳- فجد :

قيمة كل من :

(أ) نها_۲ (۲ د (س) - ه (س))

(ب) نہا_۲ھ^۲ (س)

(ج) نہا_۲ (د) س (س) × ۳ (س) (س)

$$(3) \text{ احسب : نها } \left(\underset{\text{س} \leftarrow 1}{3} \text{ س } \underset{\text{س} \leftarrow 2}{2} - \underset{\text{س} \leftarrow 1}{1} \right)$$

$$(4) \text{ جد النهايات التالية : } \begin{aligned} & (أ) \text{ نها } \underset{\text{س} \leftarrow 0}{7} \text{ س } \underset{\text{س} \leftarrow 2}{5} - \underset{\text{س} \leftarrow 2}{2} \text{ نها } \left(\underset{\text{س} \leftarrow 2}{3} + \underset{\text{س} \leftarrow 2}{2} \right) \left(\underset{\text{س} \leftarrow 2}{1} - \underset{\text{س} \leftarrow 2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$(ج) \text{ نها } \underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{3} \text{ س } \underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{2} - \underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{3} \text{ نها } \underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{2} \text{ س } \underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{3} - \underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{3} \text{ س } \underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{3} + \underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{2}}{1}$$

$$(5) \text{ إذا علمت أن نها } \underset{\text{س} \leftarrow 3}{2} \text{ (س) } = 7$$

فجد النهايات التالية :

$$(أ) \text{ نها } \underset{\text{س} \leftarrow 3}{2} \text{ د (س) } - \underset{\text{س} \leftarrow 3}{5} \text{ (ب) نها } \underset{\text{س} \leftarrow 3}{2} \text{ د (س) }$$

(١ - ٤) النهايات للدوال الكسرية :

ما يعنينا الآن هو دراسة بعض الطرق لإيجاد النهايات عندما نحصل على قيم غير معرفة في حالة التعويض المباشر في الدالة . في دراستنا لهذه الطرق سنركز فقط على الحالة التي تكون فيها الدالة على الصورة :

$$\frac{\underset{\text{س} \leftarrow 1}{د} \text{ (س) }}{\underset{\text{س} \leftarrow 1}{د} \text{ (س) }} , \text{ حيث أن :}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow 1}{د} \text{ (س) } = \underset{\text{س} \leftarrow 1}{د} \text{ (س) } = \underset{\text{س} \leftarrow 1}{د} \text{ (س) } = \infty \text{ أو :}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow 1}{د} \text{ (س) } = \underset{\text{س} \leftarrow 1}{د} \text{ (س) } = \underset{\text{س} \leftarrow 1}{د} \text{ (س) } = \text{صفر}$$

(أ) في الحالة الأولى التي يكون فيها ناتج التعويض $\frac{\infty}{\infty}$ ، تقسم كلا من البسط والمقام على س مرفوعة لأكبر أس علماً بأن نها $\frac{1}{\infty} = 0$.

نوضح ذلك في الأمثلة التالية :

مثال (١) :
$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2 - 3s + 7}{3s^2 + 5s - 1}$$
 جد نها

الحل :

نقسم كلا من البسط والمقام على س^٢ (أعلى قوة للمتغير س في المقام) لنحصل على :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2 - 3s + 7}{3s^2 + 5s - 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{2s^2}{s^2} - \frac{3s}{s^2} + \frac{7}{s^2}}{\frac{3s^2}{s^2} + \frac{5s}{s^2} - \frac{1}{s^2}}$$

فعندما تغدو س أكبر فأكبر ، فإن الحدين $\frac{3}{s}$ ، $\frac{7}{s^2}$ في البسط

يغدوان أصغر فاصغر ، وبالتالي فإن البسط كله يقترب من ٢ ، وبالمثل يقترب المقام من ٣ .
وبالتالي فإن الدالة المعطاه تقترب من القيمة النهائية $\frac{2}{3}$.

مثال (٢) :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{4s^2 + 3}{5s^3 - 7}$$

بالقسمة على أعلى قوة للمتغير س وهي س^٣ نحصل على:

الحل :

$$\frac{\frac{3}{s} + \frac{4}{s}}{\frac{7}{s} - 5} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \text{نها} = \frac{3 + \frac{4}{s}}{7 - \frac{5}{s}} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \text{نها} = \frac{\text{صفر}}{5} = \text{صفر}$$

مثال (٣) :

$$\frac{1 - s + \frac{5}{s}}{3 + \frac{1}{s}} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \text{نها} \quad \text{جد :}$$

الحل :

بالقسمة على أعلى قوة للمتغير s في المقام نحصل على :

$$\infty = \frac{\frac{1}{s} - \frac{5}{s} + s}{\frac{3}{s} + 1} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \text{نها} = \frac{s - 5 + s^2}{3 + s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \text{نها}$$

(ب) الحالة الثانية والتي يكون ناتج التعويض فيها صفر نحل البسط والمقام صفر

لاستخراج العامل المشترك ($s - 1$) واختصار هذا العامل المشترك ثم التعويض في المقدار الناتج عن s بالقيمة أ لنحصل على النهاية المطلوبة كما في الأمثلة التالية

مثال (٤) :

$$\frac{s^2 - 2s - 8}{s - 4} \xrightarrow{s \rightarrow 4} \text{نها} \quad \text{جد :}$$

الحل :

عند التعويض المباشر نحصل على $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهي قيمة غير معرفة ولكن :

$$\frac{(s + 2)(s - 4)}{(s - 4)} = \frac{s^2 - 2s - 8}{s - 4}$$

$$s + 2 = , \quad s \neq 4$$

إذن :

$$\text{نها} = \frac{\text{نها}^2 - \text{س}^2 - 8}{\text{س} - 4} = \text{نها} (\text{س} + 2) = 6$$

وقد نلجأ أحياناً إلى تبسيط الدالة التي يصعب تحليلها إلى الضرب في المرافق ، ويكون ذلك غالباً في الدوال التي تشمل على مقادير جذرية في بسطها أو مقامها فلايجاد النهاية التالية :

$$\text{نها} = \frac{\sqrt{36 - 1 - \text{س}}}{\text{س} - 4}$$

ستجد أن التعويض المباشر يعطيك قيمة غير محددة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ولكن يمكنك إزالة الجذر من البسط وذلك بضرب كل من البسط والمقام للدالة في المقدار $\sqrt{36 + 1 - \text{س}}$ وهو ما يعرف بالمرافق للمقدار لتصبح :

$$\text{نها} = \frac{\sqrt{36 + 1 - \text{س}}}{\sqrt{36 + 1 - \text{س}}} \times \frac{\sqrt{36 - 1 - \text{س}}}{\text{س} - 4} = \frac{(\text{س} - 4)}{(\sqrt{36 + 1 - \text{س}})(\text{س} - 4)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{36 + 1 - \text{س}}} = \text{نها} = \frac{1}{(\sqrt{36 + 1 - \text{س}})}$$

تمرين (١ - ٤)

جد النهايات التالية :

$$(1) \text{نها} = \frac{\text{س}^2 - 2}{\text{س}^2 - \text{س} - 2}$$

$$(2) \text{نها} = \frac{1 - (\text{س} + 1)^2}{\text{س}}$$

$$(3) \quad \frac{\text{نها} \quad 4 \text{ س}^2 + 5}{\text{س} \leftarrow \infty \quad 1 + 2 \text{ س}^2}$$

$$(4) \quad \frac{\text{نها} \quad 7 + 3 \text{ س}}{\text{س} \leftarrow \infty \quad 5 + 4 \text{ س}^2} \quad , \quad \text{أقسم البسط والمقام على س}$$

$$(5) \quad \frac{\text{نها} \quad \sqrt{3 - 6 - \text{س}}}{\text{س} \leftarrow 10 \quad 15 - \text{س}}$$

$$(6) \quad \frac{\text{نها} \quad \sqrt{2 - 3 + \text{س}}}{\text{س} \leftarrow 1 \quad 1 - \text{س}}$$

$$(7) \quad \frac{\text{نها} \quad \text{س}}{\text{س} \leftarrow 0 \quad 2 - 4 + 3 \text{ س}^2}$$

$$(8) \quad \frac{\text{نها} \quad \sqrt{3 - 2 - \text{س}}}{\text{س} \leftarrow 3 \quad 3 - \text{س}}$$

$$(9) \quad \text{أثبت أن} \quad \frac{\text{نها} \quad (\text{س} + \text{و}) - 2 \text{ س}^2}{\text{و}} = 2 \text{ س}$$

$$(10) \quad \frac{\text{نها} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + \text{ن}}{\text{ن} \leftarrow \infty \quad 2 \text{ ن}}$$

(١ - ٥) بعض النهايات الهامة :

(١) إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$$\text{نها} \quad \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن} \text{ أ}^{\text{ن}-1}$$

البرهان :

فك القوسين في المقدار التالي :
 $(\text{س} - \text{أ}) (\text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-2} \text{ أ} + \dots + \text{س} \text{ أ}^{\text{ن}-2} + \text{أ}^{\text{ن}-1})$

$$= س^{\text{ن}} + أ^{\text{ن-1}} + أ^{\text{ن-2}} + + أ^{\text{ن-1}} - أ^{\text{ن-1}} - أ^{\text{ن-2}} - - أ^{\text{ن-1}} - أ^{\text{ن-2}} = س^{\text{ن}} - أ^{\text{ن}}$$

$$\therefore س^{\text{ن}} - أ^{\text{ن}} = (س - أ) (س^{\text{ن-1}} + أ^{\text{ن-1}} + + أ^{\text{ن-2}} + أ^{\text{ن-1}})$$

بالقسمة على س - أ

$$س^{\text{ن}} - أ^{\text{ن}} = \frac{س^{\text{ن}} - أ^{\text{ن}}}{س - أ} = س^{\text{ن-1}} + أ^{\text{ن-1}} + + أ^{\text{ن-2}} + أ^{\text{ن-1}}$$

(لاحظ أن هناك ن من الحدود في الطرف الأيسر)
إذن :

$$\text{نها } س^{\text{ن}} - أ^{\text{ن}} = \frac{س^{\text{ن}} - أ^{\text{ن}}}{س - أ} = (س^{\text{ن-1}} + أ^{\text{ن-1}} + + أ^{\text{ن-2}} + أ^{\text{ن-1}})$$

$$= أ^{\text{ن-1}} + أ^{\text{ن-1}} + + أ^{\text{ن-1}} + أ^{\text{ن-1}}$$

$$= ن أ^{\text{ن-1}} \text{ وهو المطلوب}$$

$$\text{مثال (١) : } \frac{س^{\text{٤}} - أ^{\text{٤}}}{س - أ} = \frac{س^{\text{٤}} - أ^{\text{٤}}}{س - أ} = \text{نها } س^{\text{٤}} - أ^{\text{٤}}$$

$$= ٤ \times ١٢٥ = ٥٠٠$$

نتيجة مباشرة :

$$\text{نها } س^{\text{ن}} - أ^{\text{ن}} = \frac{س^{\text{ن}} - أ^{\text{ن}}}{س - أ} = \frac{س^{\text{ن}} - أ^{\text{ن}}}{س - أ}$$

حيث ن ، م عدنان صحيحان موجبان .

البرهان :

$$\frac{س^أ - س^أ^أ}{س - أ} \div \frac{س^أ - س^أ^أ}{س - أ} = \frac{س^أ - س^أ^أ}{س^أ - س^أ^أ}$$

$$\begin{aligned} \frac{س^أ - س^أ^أ}{س - أ} \div \frac{س^أ - س^أ^أ}{س - أ} &= \frac{س^أ - س^أ^أ}{س^أ - س^أ^أ} \\ \frac{س^أ - س^أ^أ}{س - أ} \div \frac{س^أ - س^أ^أ}{س - أ} &= \frac{س^أ - س^أ^أ}{س^أ - س^أ^أ} \\ \frac{س^أ - س^أ^أ}{س - أ} \div \frac{س^أ - س^أ^أ}{س - أ} &= \frac{س^أ - س^أ^أ}{س^أ - س^أ^أ} \end{aligned}$$

وهو المطلوب

مثال (٢) :

$$\frac{٥}{٤} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٥^٣ - ٥^٣}{٤^٣ - ٤^٣} = \frac{٢٤٣ - ٢٤٣}{٨١ - ٨١} = \frac{١٥}{٤}$$

في الواقع أن هذه النهاية ليست صحيحة فقط حينما تكون ن عدداً صحيحاً موجباً ، بل هي صحيحة كذلك حينما تكون ن أى عدد حقيقي ولكن برهان ذلك خارج نطاق هذا الكتاب

مثال (٣) :

$$\frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}} = \frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}$$

نشاط :

حاول إيجاد النهاية في المثال السابق بضرب وقسمة الدالة بمرافق البسط .

تمرين (١-٥)

جد النهايات التالية :

$$(١) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 - 1}{s - 1}$$

$$(٢) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s + 5}{s + 1}$$

$$(٣) \quad \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s + 3}{s + 27}$$

$$(٤) \quad \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s + 5}{s + 8}$$

$$(٥) \quad \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s - 6}{s - 2}$$

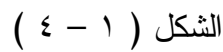
$$(٦) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s - 1}{s - 1}$$

$$(٧) \quad \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s + 2}{s + 8}$$

$$(٨) \quad \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^2 - 3}{s^3 - 1}$$

$$(٩) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 - 1}{s}$$

$$(١٠) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 - 4}{s}$$


$$s_s = \frac{s_s}{\pi^2} \times 1 \times \pi^2 =$$

$$\overline{\overline{\text{أب}}} = \frac{\overline{\overline{\text{أب}}}}{1} = \frac{\overline{\overline{\overline{\overline{\text{أب}}}}}}{1} = \text{ظاس}$$

$$\overline{\overline{\text{ج د}}} = \frac{\overline{\text{ج د}}}{\text{۱}} = \frac{\overline{\text{ج د}}}{\overline{\text{ج و}}} = \text{جاس}$$

لاحظ من الشكل أن :

طول القوس $A_j < \overline{JD}$

جد = جا س ، القوس أ ج = س

∴ جا س > س

فإذا كانت $0 < s < \frac{\pi}{2}$

فإن $0 < جاس < س$
ونأخذ النهاية عندما $س \leftarrow 0$ نجد أن :

$$0 = \lim_{س \leftarrow 0} جاس$$

ومن المعلوم أن :
 $1 - جتا س = 2 جا^2 \frac{س}{2}$
ولما كانت نها $\lim_{س \leftarrow 0} جا = \frac{س}{2}$
 $\therefore \lim_{س \leftarrow 0} (1 - جتا س) = 0$

$$\therefore \lim_{س \leftarrow 0} جتا س = 1$$

لاحظ من الشكل أن $جد > طول القوس أ ج > أب$
أى أن :
 $جاس > س > ظاس$
بما أن $س$ موجبة فإن :

$$\frac{1}{جاس} < \frac{1}{س} < \frac{1}{ظاس}$$

بالضرب في $جاس$ نجد أن :
 $1 < \frac{جاس}{س} < جتا س$

هذه المتباينة صحيحة حتى إذا كان $س$ سالبة حاول اثبات ذلك . بأخذ
النهاية عندما $س \leftarrow 0$.

$$\text{س. نهـا} \cdot 1 \leq \frac{\text{جا س}}{\text{س. نهـا}} \leq \text{س. نهـا جتا س}$$

$$\text{أي } 1 \leq \text{س. نهـا} \cdot \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \leq 1 \text{ (لأن جتا } 0 = 1 \text{)}$$

$$1 = \text{س. نهـا} \cdot \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$$

إذن

، وهو المطلوب .

$$\boxed{1 = \text{س. نهـا} \cdot \frac{\text{جا س}}{\text{س}}}$$

مثال (٤) :

$$\text{أثبت أن } \text{س. نهـا} \cdot \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = 1$$

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جا س}}{\text{س}} &= \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} \\ \frac{1}{\text{جتا س}} \cdot \text{س. نهـا} \times \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \cdot \text{س. نهـا} &= \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} \cdot \text{س. نهـا} \\ 1 &= 1 \times 1 = \end{aligned}$$

مثال (٥) :

$$\text{جد } \text{س. نهـا} \cdot \frac{\text{جا } 3\text{س}}{\text{س}}$$

الحل :

$$\text{ضع } ع = 3\text{س} \cdot ع - 0 \text{ عندما س} = 0$$

إذن :

$$\frac{\text{جا}^3}{\text{ع}} \cdot \text{نها} = \frac{\text{جا}}{\frac{\text{ع}}{3}} \cdot \text{نها} = \frac{\text{جا}^3}{\text{س}} \cdot \text{نها}$$

$$3 = 1 \times 3 = \frac{\text{جا}}{\text{ع}} \cdot \text{نها} = 3$$

تمرین (۱ - ۶)

جد النهایات التالية :-

$$(۱) \quad \frac{\text{جا}^3}{\text{جاه س}} \cdot \text{نها} \quad \text{س} \leftarrow ۰$$

$$(۲) \quad \frac{۱}{\text{س}} \cdot \text{نها س جا} \quad \text{س} \leftarrow \infty$$

$$(۳) \quad \frac{\text{جاه س}}{\text{س}} \cdot \text{نها} \quad \text{س} \leftarrow ۰$$

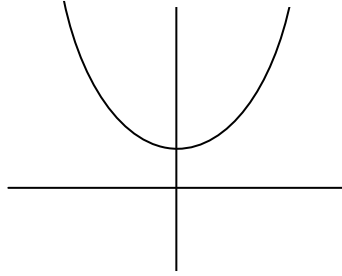
$$(۴) \quad \frac{\text{ظا}^3}{\text{س}} \cdot \text{نها} \quad \text{س} \leftarrow ۰$$

$$(۵) \quad \frac{۱ - \text{جتا س}}{\text{س}} \cdot \text{نها} \quad \text{س} \leftarrow ۰$$

(١ - ٧) الدوال المتصلة :

عرفت أن كل دالة يمكن رسم المنحنى لها على المستوى الديكارتي ،
ويمكن تعرّف بعض خواصها من خلال الرسم . والشكل (١ - ٥) يمثل منحنى

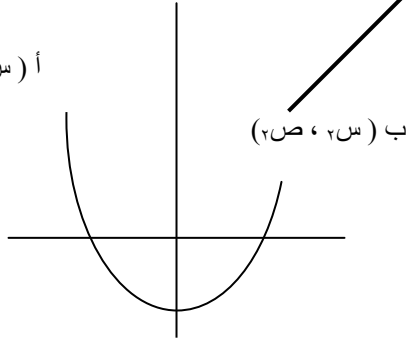
أ (١ ص ، ١ ص) ب (٢ ص ، ٢ ص)



الشكل (١ - ٥)

ج (٣ ص ، ٣ ص)

أ (١ ص ، ١ ص)



الشكل (١ - ٦)

الدالة . د (س) = س^٢ + ١

نلاحظ أنك إذا وضعت رأس القلم

عند أي نقطة أ (١ ص ، ١ ص)

على المنحنى وسرت على

المنحنى باتجاه ب (٢ ص ، ٢ ص) فإنك

ستصل إلى هذه النقطة دون أن ترفع

القلم عن المنحنى ، ويقال إن

المنحنى متصل في الفترة [س_١ ،

س_٢] .

أما الشكل (١ - ٦) فيمثل منحنى الدالة

$$هـ (س) = \begin{cases} س^٢ - ١ ، س \geq ٢ ص \\ س^٢ + ١ ، س < ٢ ص \end{cases}$$

تلاحظ أنك إذا وضعت رأس القلم عند

أ وأردت أن تصل إلى ب الواقعة

على المنحنى فإنك ستصل إلى هذه

النقطة دون أن ترفع القلم أي أن الدالة

متصلة في الفترة

[س_١ ، س_٢] . أما إذا أردت أن

تصل من ب إلى النقطة ج (س_٣ ، ص_٣) دون أن ترفع القلم ، فإنك لا تستطيع.
 نقول في مثل هذه الحالة إن الدالة ه غير متصلة في الفترة [س_٢ ، س_٣] لأنها
 غير متصلة عند النقطة التي عندها س = س_٢ . وإذا كانت س_٢ = ٢
 فإن نها ه (س) = ٥

$$\text{بينما نها ه (س) = } \frac{3}{2 - س}$$

أي أن نها ه (س) غير موجودة لأن النهاية من اليمين لا تساوى

النهاية من اليسار عند س = ٢ .

لكذلك إذا حسبت نها ه (س) = نها ه (س) = ٠

أي أن نها ه (س) = ٠ وكذلك ه (١) = ٠

لاحظ من الرسم أن ه (س) متصلة عند س = ١ .

مما سبق يمكن صياغة التعريف التالي :

تعريف (١ - ١) :

تكون الدالة د متصلة عند س = أ إذا تحققت الشروط التالية :
 (١) أ تنتمي إلى مجال الدالة د .

(٢) نها د (س) موجودة .

(٣) نها د (س) = د (أ)

تعريف (١ - ٢) :

نقول إن الدالة د (س) متصلة على الفترة
[أ ، ب] إذا كانت د متصلة عند كل نقطة
من نقاط الفترة [أ ، ب]

من تعريف الاتصال عرفنا الارتباط بينه وبين النهايات التي تعرضنا إلى
بعض النظريات الخاصة بها .
ويمكن أن نستخلص من ذلك نظريات في الاتصال تساعد على الحكم على
اتصال دالة ما عند نقطة أو في فترة .
نظرية (١ - ٣) :

إذا كان كل من الدالتين د (س) ، هـ (س) متصلتين عند س = أ فإن:
(١) د (س) ± هـ (س) متصلتان عند س = أ .
(٢) د (س) + هـ (س) متصلتان عند س = أ حيث ج عدد حقيقي .
(٣) د (س) هـ (س) متصلتان عند س = أ .

$$(٤) \quad \frac{د(س)}{هـ(س)} \text{ صلة عند } س = أ \text{ حيث } هـ(أ) \neq ٠$$

(٥) إذا كان د (س) = م_ن س^ن + م_{ن-١} س^{ن-١} + + م_١ س + م_٠ . كثيرة حدود من الدرجة ن فإن :
د (س) متصلة لكل عدد حقيقي س .

مثال (١) :

إذا كان ق (س) = ٢ س^٣ - ٣ س + ٥ بين أن الدالة ق متصلة لجميع قيم س الحقيقية .

الحل :

نها ق (س) = ق (أ) لجميع قيم أ الحقيقية لأن ق كثيرة حدود .
ق متصلة لجميع قيم س الحقيقية . ∴

مثال (٢) :

$$\left. \begin{array}{l} ٢ - ٥ \leq س \leq ١ - ٢ \\ ٢ \leq س \leq ٣ - ٢ \end{array} \right\} \text{ ليكن د (س) = } \left. \begin{array}{l} ٢ - ٥ \leq س \leq ١ - ٢ \\ ٢ \leq س \leq ٣ - ٢ \end{array} \right\}$$

اثبت أن الدالة د متصلة على الفترة [١ - ٣]

الحل :

من التعريف د (س) متصلة في الفترة $[-1, 2]$ لأن د كثيرة حدود وكذلك على الفترة $[2, 3]$ ، ولكن نبحت عن الاتصال عند $s = 2$ وهى النقطة التي تتغير عندها قاعدة الدالة. فنجد أن نها د (س) $= 3 - 2 \times 2 = 1$ $s \leftarrow 2^+$

$$\text{نها د (س)} = 2 \times 2 - 5 = 1 \quad s \leftarrow 2^-$$

$$\text{نها د (س)} = \text{نها د (س)} = 1 \quad s \leftarrow 2^+ \quad s \leftarrow 2^-$$

$$\text{وأن د (2)} = 3 - 2 \times 2 = 1$$

$$\text{إذن د (س) متصلة عند } s = 2$$

د متصلة على الفترة $[-1, 3]$

مثال (3) :

$$\frac{s^2 - 4}{s + 2} = \text{ليكن ق (س)}$$

أبحث في اتصال ق عند $s = -2$

الحل :

إن ق غير معرفة عند $s = 2^-$ على الرغم من أن

$$\begin{aligned} \text{نها ق (س)} &= \lim_{s \rightarrow 2^-} \frac{(s+2)(s-2)}{s+2} = \lim_{s \rightarrow 2^-} (s-2) = 0 \\ \text{نها (س-2)} &= \lim_{s \rightarrow 2^-} (s-2) = 0 \end{aligned}$$

وبالاعتماد على تعريف الاتصال عند نقطة فإن ق غير متصلة عند $s = 2^-$
وما عدا ذلك فإن ق متصلة عند $s = \text{الجميع قيم أ}$.

تمرين (١ - ٧)

بين فيما إذا كانت كل من الدوال التالية متصلة عند النقطة المذكورة إزاء

كل منها:

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + 1 \text{ س} \neq 4, \text{ عند س} = 4 \\ \text{س} = 15 \end{array} \right\} = (1) \text{ ق (س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2, \text{ س} < 3, \text{ عند س} = 3 \\ \text{س}^3, \text{ س} \geq 3 \end{array} \right\} = (2) \text{ د (س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 - \text{س}^2, -2 \leq \text{س} < 1 \text{ في الفترة } [-2, 1) \\ \text{س} + 1, 1 \leq \text{س} \leq 2 \end{array} \right\} = (3) \text{ هـ (س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - 5\text{س} + 6, \text{ س} \neq 2, \text{ عند س} = 2 \\ \text{س} - 2 \\ 0, \text{ س} = 2 \end{array} \right\} = (4) \text{ د (س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - 25, \text{ س} \neq 5, \text{ عند س} = 5 \\ \text{س} - 5 \\ 3\text{س} - 5, \text{ س} = 5 \end{array} \right\} = (5) \text{ ل (س)}$$

$$(٦) د (س) = \left. \begin{array}{l} \frac{\text{جا}^2 \text{س} - \text{جتا س}}{\text{س}} \\ \frac{١}{٢} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س} \neq ٠ \\ \text{عند س} = ٠ \end{array}$$

$$(٧) هـ (س) = \left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{٣ - ٢ - \text{س}} - \sqrt{٢ + \text{س}}}{٢ - \text{س}} \\ \frac{٣}{٢} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س} \neq ٢ \\ \text{عند س} = ٢ \end{array}$$

(٨) ضع قيمة ك التي تجعل الدالة التالية متصلة عند -٢ =

$$د(س) = \left. \begin{array}{l} \text{جتا}^2 \text{س} - ١ \\ \text{ك} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س} \neq ٠ \\ \text{س} \neq ٠ \end{array}$$

(٩) أعد تعريف الدالة التالية بحيث تكون متصلة عند س = ٣

$$د(س) = \left. \begin{array}{l} \sqrt{٣ + \text{س}^2} \\ \text{س} - ١ \end{array} \right\}$$

الوحدة الثانية



أهداف الوحدة الثانية

بعد دراسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن :-

- ١- يتعرف التغير .
- ٢- يتعرف متوسط معدل التغير .
- ٣- يتعرف مشتقة الدالة .
- ٤- يجد مشتقة الدالة من المبادئ الأولية .
- ٥- يجد المشتقة الأولى للدالة الثابتة .
- ٦- يجد المشتقة الأولى للدالة $v = s^n$.
- ٧- يجد المشتقة للدوال المثلثية - الجيب وجيب التمام .
- ٨- يتعرف مشتقة مجموع أو فرق دالتين .
- ٩- يتعرف مشتقة حاصل ضرب دالتين .
- ١٠- يتعرف مشتقة حاصل قسمة دالتين .
- ١١- يتعرف مشتقة دالة الدالة .
- ١٢- يتعرف اشتقاق الدوال المعرفة ضمناً .
- ١٣- يتعرف المشتقات العليا .

(٢) التفاضل

(٢ - ١) التغير ومتوسط معدل التغير :

في هذا الفصل سنهتم بمعالجة مسألة إيجاد ما يسمى بمعدل التغير ، مثل معدل التغير في المسافة التي يقطعها صاروخ بالنسبة إلى الزمن عند نقطة معينة في الفضاء ، أو معدل الزيادة في المساحة السطحية لقرص يتمدد بالحرارة بالنسبة إلى نصف قطره ، أو معدل التغير في إنتاج سلعة بالنسبة لعدد المشتغلين بصناعة هذه السلعة . في كل هذه الأمثلة وغيرها نفترض معرفتنا للدالة التي تربط بين المتغيرين المذكورين ، بين المسافة والزمن ، و بين مساحة سطح القرص ونصف قطره ، و بين الإنتاج وعدد العمال وهكذا .

وبصورة عامة نفرض أن $v = d(s)$ وأن s تغيرت من s_1 إلى s_2 تبعاً لذلك تتغير v من $v_1 = d(s_1)$ إلى $v_2 = d(s_2)$. ونقول إن s قد طرأ عليها تغير بمقدار $s_2 - s_1$ ، ونرمز له بـ Δs (دلتا s) وتبعاً لذلك تغيرت v بمقدار $v_2 - v_1$ ، ونرمز له بـ Δv . أى :

$$\Delta v = v_2 - v_1$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = d(s_2) - d(s_1)$$

بكتابة $s_2 = s_1 + \Delta s$ فإن :

$$\Delta v = d(s_2) - d(s_1) = d(s_1 + \Delta s) - d(s_1)$$

ص بـ :

$$\Delta v = d(s_1 + \Delta s) - d(s_1)$$

متوسط معدل التغير :

يعرف متوسط معدل تغير الدالة $v = d(s)$ إذا تغيرت s من s_1

إلى $s_2 = s_1 + \Delta s$ بـ :

$$\bar{v} = \frac{d(s_1 + \Delta s) - d(s_1)}{\Delta s} \quad \Delta s \neq 0$$

مثال (١) :

احسب متوسط معدل التغير للدالة $v = d(s)$ عندما تتغير s من ٣ إلى ٣,٢١ .

الحل :

$$\begin{aligned} \Delta v &= d(s + \Delta s) - d(s) \\ s &= 3, \Delta s = 3,21 - 3 = 0,21 \\ \therefore \Delta v &= d(3,21) - d(3) = \sqrt{2 - 3,21} - \sqrt{2 - 3} \\ &= \sqrt{1,21} - \sqrt{1} = 1,1 - 1 = 0,1 \\ \therefore \frac{\Delta v}{\Delta s} &= \frac{0,1}{0,21} = \frac{10}{21} \approx 0,476 \end{aligned}$$

مثال (٢) :

تتمدد صفيحة دائرية بالتسخين . احسب متوسط معدل التغير في مساحتها عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ سم إلى ٦,١ سم .

الحل :

$$\begin{aligned} \text{نفرض أن طول نصف القطر} &= \text{نق} \\ \text{مساحة الصفيحة م} &= d(\text{نق}) = \pi \text{نق}^2 \\ \frac{\Delta m}{\Delta \text{نق}} &= \frac{d(6,1) - d(6)}{6,1 - 6} = \frac{\pi [6,1^2 - 6^2]}{0,1} \\ &= \frac{\pi (6,1 + 6)(6,1 - 6)}{0,1} = \frac{12,1 \times 0,1 \times \pi}{0,1} \\ &= \pi 12,1 \end{aligned}$$

تمرين (٢ - ١)

(١) جد متوسط معدل التغير للدوال المذكورة .

أ . د (س) = $2 - س$ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٤ .

ب . د (ر) = $\sqrt{3 + ر}$ عندما تتغير ر من ٠ إلى ٢ .

ج . د (س) = $س^3 - ١$ عندما تتغير س من ٠ إلى $\frac{١}{٢}$

(٢) يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث يكون بعده ف عن نقطة ثابتة بعد ن ثانية معطى بالعلاقة :

$$ف = ٢ن - ٢ + ٥$$

احسب سرعته المتوسطة (أى متوسط تغير ف بالنسبة لـ ن) خلال التغير من ن = ١ ث إلى ن = ٣ ث .

(٣) فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروي .

احسب متوسط معدل التغير في مساحة السطح الكروي للفقاعة عندما

يتغير طول نصف قطرها من ٦ مم إلى ٦,٢ مم . (مساحة سطح

الكرة بدلالة نصف قطرها نق تساوى ٤π نق ٢) .

(٢ - ٢) مشتقة الدالة :

نمهد للمشتقة بالمسألة الهندسية التالية :

جد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة

(س_١ ، د (س_١)) . من دراستنا للهندسة الإحداثية عرفنا أن ميل المستقيم

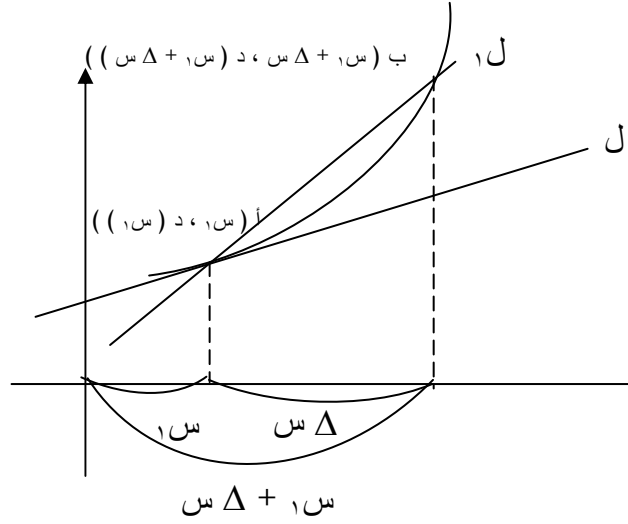
الواصل بين أي نقطتين يساوي فرق الإحداثيين الصاديين للنقطتين مقسوماً على

فرق الإحداثيين السينيين لهما ميزات الترتيب. إذن :

ميل الوتر ل_١ الواصل بين النقطتين أ (س_١ ، د (س_١)) و ب

(س_١+Δ ، د (س_١+Δ)) يساوي :

$$\frac{د(س_١+Δ) - د(س_١)}{س_١+Δ - س_١} = \frac{د(س_١) - د(س_١+Δ)}{س_١ - (س_١+Δ)}$$



الشكل (٢ - ٢)

فإذا تحركت ب نحو أ اقترب الوتر ل شيئاً فشيئاً من المماس ل لمنحنى ص = د (س) عند أ (س_١ ، د (س_١)) ومن ثم يقترب المقدار :

$$\frac{d(s_1 + \Delta) - d(s_1)}{\Delta} \text{ نحو ميل المماس للمنحنى عند}$$

أ (س_١ ، د (س_١)) إذا ميل المماس عند س = س_١ هو النهاية التي يستقر عندها المقدار :

$$\frac{d(s_1 + \Delta) - d(s_1)}{\Delta} \text{ كلما اقتربت ب من أ (أى كلما}$$

اقتربت Δ س من الصفر) .

إذن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند س = س_١ هو النهاية .

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{d(s_1 + \Delta) - d(s_1)}{\Delta}$$

بفرض وجود تلك النهاية .

بما أن s_1 أى نقطة في نطاق تعريف الدالة $v = d(s)$ فإن النهاية.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d(s + \Delta s) - d(s)}{\Delta s}$$

ان وجدت ، تعنى هندسياً ميل المماس لمنحنى الدالة $v = d(s)$ عند s ويسمى بالمشتقة الأولى للدالة v بالنسبة s ، ويرمز للمشتقة بـ :

$$v' \text{ أو } \frac{dv}{ds} \text{ أو } d'(s) \text{ أو } \frac{d}{ds}(d(s))$$

وتسمى أيضاً بالمعامل التفاضلي الأول لـ v بالنسبة لـ s وتسمى بمعدل تغير v بالنسبة لـ s .
إذن نكتب :

$$d'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d(s + \Delta s) - d(s)}{\Delta s}$$

سنتطرق لاحقاً إلى قواعد أساسية لإيجاد المشتقات الأولى للدوال المختلفة غير أنه يمكن إيجاد المشتقات مباشرة من التعريف وذلك بما يعرف بإيجاد المشتقة من المبادئ الأولية .

مثال (١) :

جد المشتقة الأولى للدالة $v = s^2$ من المبادئ الأولية ، ثم جد قيمتها العددية عند $s = 3$ ، ماذا يعنى ذلك هندسياً ؟

الحل :

$$v = d(s) = s^2$$

$$d'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d(s + \Delta s) - d(s)}{\Delta s}$$

$$\text{وبما أن } d(s) = s^2$$

$$\therefore d(s + \Delta s) = (s + \Delta s)^2$$

$$\therefore d'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{(s + \Delta s)^2 - s^2}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2s\Delta s + \Delta s^2 - s^2}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2s\Delta s + \Delta s^2}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s(2s + \Delta s)}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} (2s + \Delta s)$$

وبما أن $\Delta s \leftarrow 0$

$$\therefore d'(s) = (s)^2 = 2s, \text{ عند } s = 3$$

$$\therefore d'(3) = 2 \times 3 = 6$$

هندسياً تعنى ان ميل المماس لمنحنى الدالة $v = s^2$ عند النقطة $(3, 6)$ هو 6 .

مثال (٢) :

إذا كان $v = \frac{1}{s}$ فجد $\frac{dv}{ds}$ من المبادئ الأولية .

الحل :

$$v = \frac{1}{s}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{d(s + \Delta s) - d(s)}{\Delta s}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta + \Delta}}{\Delta} = \\
& \frac{(\Delta + \Delta) - \Delta}{(\Delta + \Delta) \Delta} = \\
& \frac{\Delta}{(\Delta + \Delta) \Delta} = \\
& \frac{1}{(\Delta + \Delta)} - = \\
& \left(\frac{1}{(\Delta + \Delta)} - \right) \cdot \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta}
\end{aligned}$$

تمرين (٢ - ٢)

جد المشتقات الأولى للدوال التالية من المبادئ الأولية :

$$(١) \text{ ص } = ٥ - ٣ \text{ س}$$

$$(٢) \text{ ص } = \text{س}^٢ - ٢$$

$$(٣) \text{ ص } = (\text{س} + ١) (\text{س} - ٤)$$

$$(٤) \text{ ص } = \frac{1}{(٥ + ٢ \text{ س})^٢}$$

$$(٥) \text{ ص} = \frac{\text{ج}}{\text{س} + ٣} , \text{ ج ثابت}$$

$$(٦) \text{ ع} = \frac{١}{\text{ن} + ٢} + \frac{١}{\text{ن} + ٤}$$

(٢ - ٣) إيجاد المشتقة الأولى لبعض الدوال :
 (أ) الدالة الثابتة ص = أ (أ ثابت) :
 ص = د (س) = أ

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{د} (\text{س} + \Delta \text{ س}) - \text{د} (\text{س})}{\Delta \text{ س}}$$

$$\text{صفر} = \frac{٠}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{أ} - \text{أ}}{\Delta \text{ س}} =$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{نها} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{\text{د}}{\text{د س}} = (\text{أ}) = ٠$$

(ب) الدالة ص = س^ن (ن عدد صحيح ثابت) :
 ص = د (س) = س^ن

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{د} (\text{س} + \Delta \text{ س}) - \text{د} (\text{س})}{\Delta \text{ س}}$$

$$= \frac{(\text{س} + \Delta \text{ س})^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\Delta \text{ س}}$$

$$= \frac{(\text{س} + \Delta \text{ س})^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{(\text{س} + \Delta \text{ س}) - \text{س}}$$

$$\text{ضع } ع = س + \Delta \text{ س} . \text{ إذن } ع \leftarrow س \text{ عندما } \Delta \text{ س} \leftarrow 0 .$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} \text{ نها } = \frac{ع - س}{ع - س} = 1$$

$$\therefore \text{ إذا كان } ص = س$$

$$\text{ فإن } \frac{د ص}{د س} = 1$$

(٢ - ٤) المشتقة الأولى للدوال المثلثية

$$\text{وبما أن نها } \frac{س - أن}{س - أ} = \frac{ن - أن}{ن - أ}$$

صحيحة لجميع قيم ن الصحيحة والكسرية والسالبة والموجبة فإنه إذا كان
 $ص = س$ فإن $\frac{د ص}{د س} = 1$ لجميع قيم ن الصحيحة والكسرية
 والموجبة والسالبة.

(ج) الدالة $ص = أ د(س)$ ، أثبت :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{أ د(س + \Delta س) - أ د(س)}{\Delta س}$$

$$\therefore \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{أ د(س + \Delta س) - أ د(س)}{\Delta س} = \frac{أ د(س + \Delta س) - أ د(س)}{\Delta س}$$

$$= \frac{أ د(س + \Delta س) - أ د(س)}{\Delta س}$$

$$أ د'(س) =$$

أى أن مشتقة حاصل ضرب الثابت في الدالة يساوى حاصل ضرب الثابت في مشتقة الدالة

فإذا كان $v = u^n$

فإن $\frac{dv}{du} = n u^{n-1}$

مثلاً : إذا كان $v = u^5$ فإن $\frac{dv}{du} = 5u^4$

(د) الدالة $v = u$:

$v = u \Rightarrow \frac{dv}{du} = 1$

$$\frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{u + \Delta u - u}{\Delta u} = 1$$

$$\frac{u + \Delta u - u}{\Delta u} = \frac{u}{\Delta u} = \frac{u}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} = \frac{u \Delta u}{\Delta u^2} = \frac{u}{\Delta u}$$

$$= \frac{u}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} = \frac{u \Delta u}{\Delta u^2} = \frac{u}{\Delta u}$$

$$\therefore \frac{dv}{du} = \frac{u}{\Delta u} = \frac{u}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} = \frac{u \Delta u}{\Delta u^2} = \frac{u}{\Delta u}$$

$$= \frac{dv}{du} = 1 \times \frac{dv}{du} = \frac{dv}{du}$$

لأنه بوضع $\frac{\Delta \text{س}}{2} = \text{ع}$ فإن :

$$\text{جا} \frac{\Delta \text{س}}{2} = \frac{\Delta \text{س}}{2} \cdot \text{نها} \quad \text{جا} \frac{\Delta \text{س}}{2} = \frac{\Delta \text{س}}{2} \cdot \text{نها} \quad \text{جا} \frac{\Delta \text{س}}{2} = \frac{\Delta \text{س}}{2} \cdot \text{نها}$$

$$\text{إذا كان ص} = \text{جا س} \quad \text{فإن} \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س}$$

(هـ) الدالة $\text{ص} = \text{جتا س}$:

أما إذا كانت $\text{ص} = \text{د} (\text{س})$ جتا س

$$\text{فإن} \quad \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{جتا} (\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{جتا س}}{\Delta \text{س}}$$

$$\frac{\text{جا} \frac{\Delta \text{س}}{2} \cdot \frac{\Delta \text{س}}{2} + \frac{\Delta \text{س}}{2} \cdot \frac{\Delta \text{س}}{2} - \frac{\Delta \text{س}}{2} \cdot \frac{\Delta \text{س}}{2}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \frac{\text{جا} \frac{\Delta \text{س}}{2} \cdot \frac{\Delta \text{س}}{2} + \frac{\Delta \text{س}}{2} \cdot \frac{\Delta \text{س}}{2} - \frac{\Delta \text{س}}{2} \cdot \frac{\Delta \text{س}}{2}}{\Delta \text{س}}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{نها} \left(\text{جا} \frac{\Delta \text{س}}{2} + \text{س} \right) \cdot \text{نها} \left(\frac{\Delta \text{س}}{2} \right) \cdot \text{نها} \left(\frac{\Delta \text{س}}{2} \right)$$

$$= - \text{جا س} \times 1 = - \text{جا س}$$

$$\text{إذا كان } \Delta = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} \text{ فإن } - \Delta \text{ ج س} = - \Delta \text{ ج س}$$

تمرين (٢ - ٣)

جد قيمة $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$ في كل من الحالات التالية :

$$(١) \Delta = -٧$$

$$(٢) \Delta \text{ س} = ٥$$

$$(٣) \Delta \text{ س} = \sqrt{١٠}$$

$$(٤) \Delta \text{ س} = \frac{١}{٥}$$

$$(٥) \Delta = ٣ \text{ جتا س}$$

$$(٦) \Delta \text{ س} = \frac{٧}{٤}$$

$$(٧) \Delta \text{ س} = ٢ \text{ س}^{-٣}$$

$$(٨) \Delta \text{ س} = \frac{١}{\sqrt{١٠}}$$

(٢ - ٤) القواعد الأساسية للتفاضل :

(أ) مشتقة مجموع أو فرق الدالتين :

لتكن كل من ل ، ع دالتين في المتغير س

$$\Delta \text{ ص} = \Delta \text{ ل} \pm \Delta \text{ ع}$$

فإذا تغيرت س بمقدار Δ س فإن كلا من ص ، ل ، ع تتغير بمقدار Δ ص ، Δ ل ، Δ ع على الترتيب

$$\therefore \Delta \text{ ص} + \Delta \text{ ل} = (\Delta \text{ ل} + \Delta \text{ ل}) \pm (\Delta \text{ ع} + \Delta \text{ ع})$$

$$\Delta^2 \text{ ص} = \Delta \pm \Delta \text{ ل} = \Delta \text{ ع}$$

$$\therefore \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\Delta \text{ ل}}{\Delta \text{ س}} \pm \frac{\Delta \text{ ع}}{\Delta \text{ س}}$$

بأخذ النهايات عندما $\Delta \text{ س} \rightarrow 0$ ،

$$\Delta \text{ ص} \rightarrow \Delta \text{ ص}^0, \Delta \text{ ل} \rightarrow \Delta \text{ ل}^0, \Delta \text{ ع} \rightarrow \Delta \text{ ع}^0$$

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\Delta \text{ ل}}{\Delta \text{ س}} \pm \frac{\Delta \text{ ع}}{\Delta \text{ س}}$$

$$\therefore \frac{د \text{ ص}}{د \text{ س}} = \frac{د \text{ ل}}{د \text{ س}} \pm \frac{د \text{ ع}}{د \text{ س}}$$

أى المشتقة الأولى بمجموع أو فرق الدالتين يساوى مجموع أو فرق مشتقتي الدالتين.

ويمكن تعميم ذلك بأن :

المشتقة الأولى للمجموع أو الفرق لأي عدد من الدوال يساوى المجموع أو الفرق لمشتقات تلك الدوال.

(ب) مشتقة حاصل ضرب الدالتين :

إذا كانت كل من ل ، ع دالتين في المتغير س وكان $\text{ص} = \text{ل} \times \text{ع}$ وتغيرت س الي $\text{س} + \Delta \text{س}$ فإن ص تتغير إلى $\text{ص} + \Delta \text{ص}$ و ل تتغير إلى $\text{ل} + \Delta \text{ل}$ ، و ع تتغير إلى $\text{ع} + \Delta \text{ع}$ ويكون : $\text{ص} + \Delta \text{ص} = (\text{ل} + \Delta \text{ل})(\text{ع} + \Delta \text{ع})$

$$= \text{ل} \times \text{ع} + \text{ل} \times \Delta \text{ع} + \Delta \text{ل} \times \text{ع} + \Delta \text{ل} \times \Delta \text{ع}$$

$$\therefore \Delta \text{ص} = \text{ل} \times \Delta \text{ع} + \Delta \text{ل} \times \text{ع} + \Delta \text{ل} \times \Delta \text{ع}$$

$$\therefore \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{ل}}{\Delta \text{س}} \times \text{ع} + \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}} \times \text{ل} + \frac{\Delta \text{ل}}{\Delta \text{س}} \times \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}}$$

وبأخذ النهايات عندما $\Delta \text{س} \rightarrow 0$ ،

$$\Delta \text{ص} \rightarrow \Delta \text{ص}^0, \Delta \text{ل} \rightarrow \Delta \text{ل}^0, \Delta \text{ع} \rightarrow \Delta \text{ع}^0$$

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{ل}}{\Delta \text{س}} \times \text{ع}^0 + \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}} \times \text{ل}^0 + \frac{\Delta \text{ل}}{\Delta \text{س}} \times \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}}$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = ل \text{ نها } \frac{ع \Delta}{س \Delta} + ع \text{ نها } \frac{ل \Delta}{س \Delta} + ل \text{ نها } \frac{د \Delta}{س \Delta}$$

$$ل = \frac{ع^2}{س^2} + ع + \frac{ل^2}{س^2} \quad \text{لأن نها } \Delta = 0$$

مثال (١) :

$$\text{جد } \frac{د}{د س} (س^{\circ} - ٤ س^2 + ٢ س + ٤)$$

الحل :

$$\frac{د}{د س} (س^{\circ} - ٤ س^2 + ٢ س + ٤)$$

$$= \frac{د}{د س} س^{\circ} - \frac{د}{د س} ٤ س^2 + \frac{د}{د س} ٢ س + \frac{د}{د س} ٤$$

$$= ٥ س^{\circ} - ٨ س + ٢ + \text{صفر}$$

$$\frac{د (ل ع)}{د س} = ل + \frac{د ع}{د س} + \frac{د ل}{د س}$$

وهو المطلوب

يحفظ تفاضل حاصل ضرب دالتين بأنه : الأولى $\times$ مشتقه الثانية + الثانية $\times$ مشتقه الأولى

نشاط :

$$\text{جد: } \frac{د}{د س} (س^{\circ} \times س^3) \text{ باستخدام القاعدة السابقة ، ثم جد } \frac{د}{د س} س^8$$

ماذا تلاحظ ؟

مثال (٢) :

$$\text{جد : } \frac{د}{د س} (٥ س^3 - ٢ س) (جاس)$$

الحل :

$$\frac{د}{دس} (٥س٣ - ٢س) (س٤ - ٣س٢)$$

$$= (٥س٣ - ٢س) \times \frac{د}{دس} (جاس) +$$

$$(جاس) \frac{د}{دس} (٥س٣ - ٢س)$$

$$= (٥س٣ - ٢س) (جاس) + (جاس) (٥س٣ - ٢س) =$$

$$= (٥س٣ - ٢س) (جاس) + (جاس) (٥س٣ - ٢س)$$

$$\therefore \frac{\frac{د}{دس} \left(\frac{ل}{ع} \right) ع - \frac{دل}{دس} ل}{\frac{د}{دس} ع} = \frac{دص}{دس}$$

وهو المطلوب .

تحفظ مشتقة خارج قسمة دالتين بـ :

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

نشاط :

$$\text{جد } \frac{د}{دس} \left(\frac{س٥}{س٣} \right) \text{ من القاعدة السابقة ثم جد } \frac{د}{دس} (س٢)$$

ماذا تلاحظ ؟

$$\text{مثال (١) : } \frac{د}{دس} \left[\frac{س٣ - ٤}{س٣ + ٥} \right] \text{ جد :}$$

$$\text{الحل : } \frac{د}{دس} \left[\frac{س٣ - ٤}{س٣ + ٥} \right]$$

$$\frac{(3س^2 + 5) (3س^2 - 4) - (3س^2) (5 - 4س^2)}{(3س^2 + 5)^2} =$$

أكمل الحل

مثال (٢) :

$$\text{أثبت أن : } \frac{د}{دس} (ظا س) = قا^2 س$$

الحل :

$$\frac{جا س}{جتا س} = ظا س = \text{ضع ص}$$

بتفاضل خارج قسمة دالتين

$$\frac{جتا س \frac{د}{دس} (جا س) - \frac{د}{دس} (جتا س)}{جتا^2 س} = \frac{د ص}{د س}$$

$$= \frac{جتا س جتا س - جا س (- جا س)}{جتا^2 س}$$

$$= \frac{جتا^2 س + جا^2 س}{جتا^2 س} = \frac{١}{جتا^2 س} = قا^2 س$$

نشاط :

أثبت أن :

$$(١) \frac{د}{دس} (قا س) = ظا س قا س$$

$$(٢) \frac{د}{دس} (ظتا س) = - قتا^2 س$$

$$(٣) \frac{د}{دس} = (قتا س) - ظتا س قتا س$$

تمرين (٢ - ٤)

جد قيمة $\frac{دص}{دس}$ في كل من الحالات التالية :

$$(١) ص = س٤ + س٣ + س٢ + ٥$$

$$(٢) ص = س٥ + س٣ + س٢ + س٢ + س + ١$$

$$(٣) ص = ١ + س + جاس$$

$$(٤) ص = \frac{١}{س} + ٥ جاس$$

$$(٥) ص = \frac{س}{١ + جاس}$$

$$(٦) ص = س٢ جاس$$

$$(٧) ص = \frac{س٢ + ٣}{س - ٢}$$

$$(٨) ص = \frac{س٢ - ٩}{س٣ - ٥}$$

$$(٩) ص = (جاس + ١) (س٢ - س)$$

$$(١٠) ص = \frac{س٣}{١ + س}$$

$$(١١) ص = \frac{س٥ - س٤ + س٣}{٧ + س٢}$$

$$(١٢) ص = \frac{١ - س٢}{١ + س٣}$$

$$(١٣) \text{ ص} = \text{جا س} + \text{جتا س}$$

$$(١٤) \text{ ص} = \text{س}^٣ \text{ جا س}$$

$$(١٥) \text{ ص} = \frac{٣ + ٤ \text{ جا س}}{٤ + ٣ \text{ جا س}}$$

$$(١٦) \text{ ص} = \frac{١ - \text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$$

$$(١٧) \text{ إذا كان ص} = \text{جا س جتا س أثبت أن } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا ٢ س}$$

(٢ - ٥) دالة الدالة :

لتكن $\text{ص} = \text{د} (\text{ل})$ دالة في المتغير ل ، و $\text{ل} = \text{ر} (\text{س})$ دالة في المتغير س . عليه فإن

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ل}} \cdot \frac{\text{د ل}}{\text{د س}}$$

البرهان :

إذا تغيرت س إلى $\text{س} + \Delta$ فإن ل تتغير إلى $\text{ل} + \Delta \text{ ل}$ وتبعاً لذلك تتغير ص إلى $\text{ص} + \Delta \text{ ص}$.

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ ل}} \cdot \frac{\Delta \text{ ل}}{\Delta \text{ س}}$$

$$\therefore \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ ل}} \cdot \text{نها } \Delta \text{ ل}$$

$$= \text{نها } \Delta \text{ ل} \cdot \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ ل}} \cdot \text{نها } \Delta \text{ ل} \quad (\text{لأن } \Delta \text{ ل} \leftarrow ٠ \text{ عندما } \Delta \text{ س} \leftarrow ٠)$$

$$= \frac{\text{د ص}}{\text{د ل}} \cdot \frac{\text{د ل}}{\text{د س}}$$

مثال (١) : جد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان :

$$\frac{٣}{٢} (٧ + ٥ س^٢) = ص (١)$$

$$٢ ص = جا س^٢ (٢)$$

الحل :

$$(١) \text{ ضع ل } ٧ + ٥ س^٢ = ل$$

$$\frac{٣}{٢} ل = ص$$

إذن ص = $\frac{٣}{٢} ل$ عليه فإن ص دالة في ل و ل دالة في س وهذا تركيب لدالة دالة .

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \cdot \frac{د ل}{د س}$$

$$= \frac{٣}{٢} ل \cdot \frac{١}{٢ (١٠ س)}$$

$$= \frac{٣}{٢} (٧ + ٥ س^٢) \cdot \frac{١}{٢ (١٠ س)}$$

$$= \frac{١}{٢} (٧ - ٥ س^٢) س$$

$$(٢) \text{ ضع ل } ٢ س = ل$$

$$\therefore ص = جا ل$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \cdot \frac{د ل}{د س}$$

$$= جا ل (٢ س)$$

$$= ٢ س جا ل$$

تلاحظ في المثال السابق أنه يتم تفاضل القوس دون النظر لما في داخله ويضرب في تفاضل ما بداخل القوس ، هذا في المسألة الأولى ، أما في الثانية فقد تم تفاضل الجيب دون النظر للزاوية s^2 ثم ضرب في تفاضل الزاوية .

مثال (٢) :

$$\text{جد } \frac{d}{ds} \text{ جا } (أس + ب)$$

الحل :

$$\frac{d}{ds} = \text{جتا } (أس + ب) \times \frac{d}{ds} (أس + ب)$$

$$= أ \text{ جتا } (أس + ب)$$

باستخدام المثال السابق وبوضع $أ = ١ - ب = \frac{\pi}{2}$ نستطيع

الحصول على $\frac{d}{ds} (جتا س)$ وذلك باتباع الآتي :

البرهان :

$$\text{ص} = \text{جتا س} = \text{جا } \left(س - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{d \text{ص}}{ds} = \text{جتا } \left(س - \frac{\pi}{2} \right) \times \frac{d}{ds} \left(س - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= - \text{جتا } \left(س - \frac{\pi}{2} \right) = - \text{جا س}$$

وهي النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً .

تمرين (٢ - ٥)

(١) جد مشتقات الدوال التالية :

$$(أ) \text{ ص} = (س^2 + ٣)^\circ$$

$$(ب) \text{ ص} = (س^2 - \frac{1}{س^3})^{\frac{1}{2}}$$

$$(ج) ص = (١ + ٢س - س٢)٣$$

$$(د) ص = جا٢س$$

$$(هـ) ص = \frac{\sqrt{١ + س٢}}{جا س}$$

$$(و) ص = \sqrt{س٢ + س٣}$$

$$(ز) ص = جا(س٣ + س)$$

$$(ح) ص = \frac{\sqrt{١ - س}}{١ + س}$$

(٢) إذا كان ص داله في ل ، ل داله في ع و ع داله في س أثبت أن :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دل} \cdot \frac{دل}{دع} \cdot \frac{دع}{دس} \text{ ومن ثم جد :}$$

$$(أ) \frac{د}{دس} [جا٢(س٥ + س٦)]$$

$$(ب) \frac{د}{دس} (ظا \sqrt{٣ + س٢})$$

(٢ - ٦) تفاضل (اشتقاق) الدوال المعرفة ضمناً :

في كل ما سبق من دوال نرى أن المتغير التابع الذي يعرف الدالة يكتب مباشرة بدلالة المتغير المستقل وتسمى الدالة في هذه الحالة دالة صريحة. لكن في كثير من الأحيان يمكن أن يرتبط المتغيران بصورة غير مباشرة ، في هذه الحالة نقول إنه يمكن تعريف متغير كداله في الآخر ضمناً وتسمى الدالة في هذه الحالة دالة معرفة ضمناً. مثال لدالة ضمنية :

$$\sqrt{س٢ + ص٢} = جا ص + س$$

ماذا تفعل لإيجاد $\frac{د ص}{د س}$ بالنظر لـ ص كداله في المتغير س ، في مثل قاعدة هذه الدالة.

لنفرض أن ص = د (س) ، عليه فإن أى داله ر (ص) في ص يمكن النظر لها كداله في س وباستخدام قاعدة دالة الدالة فإن :

$$\frac{د}{د س} (ر (ص)) = ر' (ص) \frac{د ص}{د س}$$

إذن يمكن كتابة :

$$\frac{د}{د س} ص^ن = ن ص^{ن-١} \frac{د ص}{د س}$$

$$\frac{د}{د س} جا ص = جتا ص \frac{د ص}{د س}$$

وهكذا .

مثال (١) :

$$جد \frac{د ص}{د س} \text{ إذا كان } ص + ص^٢ = ٥ س$$

الحل :

تفاضل كل الحدود بالنسبة لـ س لنحصل على :

$$١ + ٢ ص \frac{د ص}{د س} = ٥ [س \frac{د ص}{د س} + ص]$$

إذن :

$$\frac{د ص}{د س} [٢ ص - ٥ س] = ٥ ص - ١$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{٥ ص - ١}{٢ ص - ٥ س}$$

مثال (٢) : جد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان $ص^2 = س^2 + ٤$

الحل : $ص^2 = س^2 + \frac{د ص}{د س}$ = صفر

$$\therefore \frac{د ص}{د س} - = \frac{س}{ص}$$

مثال (٣) : جد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان $ص = ظا^{-١} س$ (الزاوية التي ظلها س)

الحل :

إذا كانت $ص = ظا^{-١} س$ فإن $س = ظا ص$
بتفاضل الطرفين بالنسبة لـ س نحصل على :

$$١ = قا^٢ ص \frac{د ص}{د س}$$

$$\therefore \frac{١}{قا^٢ ص} = \frac{د ص}{د س}$$

لإيجاد ذلك بدلالة س ، لاحظ أن :
 $قا^٢ ص = ١ + ظا^٢ ص = ١ + س^٢$

$$\therefore \frac{١}{١ + س^٢} = \frac{د ص}{د س}$$

تمرين (٢ - ٦)

جد $\frac{د ص}{د س}$ في كل من الدوال التالية :

- (١) $٦ = ص٤ + س٣$
- (٢) $٠ = ص٣ + س٢$
- (٣) $ص١ + س٢ = ص٣$
- (٤) $ص٢ + س٢ = ص٣$
- (٥) $ص٢ + ص٣ = س٢$
- (٦) $ص٢ + ص٢ = س٢$
- (٧) $ص٢ + س٢ = ١$
- (٨) $ص٣ + ص٢ - س٤ = ٠$
- (٩) $١ = \frac{١}{س} + \frac{١}{ص}$
- (١٠) $ص = جا (س ص)$
- (١١) $١ = \sqrt{ص١} + \sqrt{س١}$
- (١٢) $ص = \frac{جاس}{١ + جتاس}$
- (١٣) $ص = جاس + جتاس$
- (١٤) $ص = جاس (س + ص)$

(١٥) إذا كان $ص٢ + س٢ - س٢ - ص٤ = ٥$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(١، ٢)$.

(١٦) إذا كان $ص٣ جاس + ص٥ جتاس - س٣ = ٠$ جد $\frac{د ص}{د س}$.

(١٧) جد $\frac{د ص}{د س}$ في كل مما يلي :

$$\begin{aligned}
 (أ) \quad & \sqrt{ص} + \sqrt{س} = \sqrt{٢} \\
 (ب) \quad & \sqrt{س} - \sqrt{٢} = \sqrt{ص} + \sqrt{٣} \\
 (ج) \quad & (\sqrt{س} + \sqrt{ص})^٤ = \sqrt{٤} \\
 (د) \quad & \text{فقط } (\sqrt{س} + \sqrt{ص}) = \sqrt{س}
 \end{aligned}$$

(١٨) أثبت أن :

$$\frac{1}{\sqrt{س-١}} = \frac{د}{دس} (\text{جا}^{-١} س)$$

(٢ - ٧) المشتقات العليا :

لتكن $ص = د(س)$ دالة في المتغير $س$ ولتكن $\frac{دص}{دس} = د'(س)$ ،
المشتقة الأولى للدالة $ص$ بالنسبة لـ $س$ موجودة . وإذا كانت النهاية

$$\frac{د'(س + \Delta) - د'(س)}{\Delta س} \text{ نها } \Delta س \rightarrow ٠$$

موجودة أيضاً .

فتسمى بالمشتقة الثانية للمتغير $ص$ بالنسبة لـ $س$ ونرمز لها بالرمز

$$د''(س) \text{ أو } \frac{د^٢ص}{دس^٢}$$

بالمثل إذا وضعنا $د'' = د''(س)$ فإن $ص^٢$ داله في $س$ ، ويمكن

تعريف مشتقتها $\frac{دص^٢}{دس}$ بالنسبة لـ $س$ إذا وجدت النهاية

$$\frac{د''(س + \Delta) - د''(س)}{\Delta س} \text{ نها } \Delta س \rightarrow ٠$$

ونكتب :

$$d^3 s = \frac{d^2 s}{ds} (s)$$

نسمى $d^3 s (s)$ بالمشتقة الثالثة لـ s بالنسبة لـ s ونرمز لها أيضاً بـ :

$$s''' \text{ أو } \frac{d^3 s}{ds^3} \text{ أو } \frac{d^3}{ds^3} (s)$$

وهكذا يمكن تعريف المشتقة n للدالة s بالنسبة لـ s بـ :

$$\frac{d^n s}{ds^n} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d^{n-1} s}{ds^{n-1}} \right)$$

$n = 2, 3, 4, 5, \dots$
ويرمز لها أيضاً بـ $s^{(n)}$.

مثال (١) :

إذا كان $s = 6s^3 - 1$ فجد $\frac{d^2 s}{ds^2}$ عند $s = 5$.

الحل :

$$\frac{d^2 s}{ds^2} = 18s^2$$

$$\frac{d^2 s}{ds^2} = 36 \text{ س}$$

$$\therefore \frac{d^2 s}{ds^2} \bigg|_{s=5} = 36 \times 5 = 180$$

مثال (٢) :

جد المشتقة الثالثة للدالة $s = \cos 2$ عند $s = \frac{\pi}{4}$

الحل :

$$\frac{d^3 s}{ds^3} = -2 \text{ جا } 2 \text{ س}$$

$$\frac{د^۲ ص}{د س} = -۴ جتا ۲ س$$

$$\frac{د^۳ ص}{د س} = ۸ جا ۲ س$$

$$\therefore \frac{د^۲ ص}{د س} = \frac{\pi}{۴} \text{ جا } ۸ = \frac{\pi}{۲} \times ۸ = ۴\pi$$

مثال (۳) :

إذا كان ص = س جا س فاثبت أن :

$$۰ = ص + \frac{د ص}{د س} + \frac{د^۲ ص}{د س} + ۲ ص$$

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = س جتا س + جا س$$

$$\frac{د^۲ ص}{د س} = جتا س - س جا س + جتا س$$

$$۲ جتا س - س جا س =$$

$$۲ جتا س - ص =$$

$$\frac{د^۳ ص}{د س} = -۲ جا س - \frac{د ص}{د س}$$

$$\therefore \frac{د^۳ ص}{د س} + \frac{د ص}{د س} + ۲ جا س = ۰$$

بالضرب في س ، علماً بأن ص = س جا س فإن :

$$س + \frac{د ص}{د س} + ۲ ص = ۰ \text{ وهو المطلوب}$$

تمرين (٢ - ٧)

(١) جد المشتقة الثانية لكل من الدوال التالية عند النقطة المبينة أمام كل منها

(أ) $\frac{1}{s} = s + 1$ عند النقطة (١ ، ٢)

(ب) $\frac{\pi}{4} = s - \text{جتا } s$ عندما $s = \frac{\pi}{4}$

(ج) $\frac{\pi}{2} = s - \text{جتا } 2s$ عندما $s = \frac{\pi}{2}$

(٢) إذا كان $s = 3s^3 - 2s^2 + 4s$ فجد :

٢ $\frac{d^2s}{ds^2} - 5 \frac{d^2s}{ds^2} + 3 \frac{d^3s}{ds^3}$ عند $s = 1$

(٣) إذا كان $s = \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{6}s$

فجد قيم s التي يكون عندها $\frac{d^2s}{ds^2} = 0$ ثم احسب قيم $\frac{d^2s}{ds^2}$ عند هذه القيم .

(٤) إذا كان $s = 3s^3 - 2s^2 + 4s$ فاثبت أن : $\frac{d^4s}{ds^4} = 18$

(٥) إذا كان $s = \frac{1}{s+1}$ فاثبت أن $\frac{d^3s}{ds^3} + 6s^4 = 0$

(٦) إذا كانت $s = s - \text{ظا } s$ فاثبت أن :

$\frac{d^2s}{ds^2} = 2(1 + s) \text{ قا } s$

(٧) إذا كان $s^2 + 2s + 1 = 0$ ، أثبت أن :

$\frac{d^3s}{ds^3} + 1 = 0$

(٨) إذا كان $s = \text{جتا } s$ أثبت أن : $\frac{d^2s}{ds^2} - \left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = 1$

الوحدة الثالثة



أهداف الوحدة الثالثة

بعد دراسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادرا على أن :-

١. يتعرف تطبيقات على الهندسة التحليلية .
٢. يتعرف الدوال التزايدية والتناقصية .
٣. يتعرف تطبيقات على النهايات العظمي والصغري .
٤. يتعرف تطبيقات في الميكانيكا .
٥. يتعرف المعدلات الزمنية المرتبطة .

(٣) تطبيقات على التفاضل

(٣ - ١) تطبيقات على الهندسة التحليلية :

سبق أن أشرنا في البند (٢ - ٢) إلى المعنى الهندسى لمشتقة الدالة ص

$= د (س)$. فميل المماس عند النقطة $(س١ ، د (س١))$ يساوى $د' (س١)$ هذا يساعد كثيراً في حل بعض المسائل في الهندسة التى سبق أن اشرنا إلى بعضها في تمارين سابقة .

مثال (١) :

جد معادلة المماس لمنحنى الدالة $ص = \frac{1}{س}$ عند النقطة $(١ ، ١)$.

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{س^2} - \frac{1}{س}$$

∴ ميل المماس عند $س = ١$ يساوى $١ -$

∴ $ص - ص١ = م (س - س١)$ إذن معادلة المماس هى :

$$ص - ١ = ١ - (س - ١)$$

$$أو س + ص - ٢ = صفر$$

مثال (٢) :

جد معادلة المماس ومعادلة العمودى على المماس لمنحنى الدالة :

$$ص = س^٢ - س + ١ \text{ عند } س = ٠$$

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ٢س - ١$$

∴ ميل المماس عند النقطة $(٠ ، ١)$ يساوى $١ -$

∴ معادلة المماس :

$$ص - ص١ = م (س - س١) \quad (س - ١)$$

$$ص - ١ = ١ - (س - ٠)$$

$$\Leftarrow ص + س - ١ = ٠$$

ميل العمودى على المماس $= ١$

∴ معادلة العمودي :

$$\text{ص} - 1 = 1 - (\text{س} - 0)$$

$$\Leftrightarrow \text{ص} - \text{س} - 1 = 0$$

مثال (٣) :

جد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة :

$$\text{ص} = \text{ظا س} \text{ عندما } \text{س} = \frac{\pi}{4}$$

الحل :

$$\text{ص} = \text{ظا س}$$

$$\therefore \frac{د \text{ص}}{د \text{س}} = \text{قا س}$$

$$\text{عندما } \text{س} = \frac{\pi}{4}, \text{ ص} = \text{ظا } \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\therefore \text{ميل المماس عند النقطة } \left(1, \frac{\pi}{4} \right) = \text{قا } \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \sqrt{1} = 1$$

$$\therefore \text{ميل العمودي عليه : } -\frac{1}{1}$$

∴ معادلة المماس هي :

$$\text{ص} - 1 = (\text{س} - \frac{\pi}{4})$$

$$\text{ص} - 1 = \text{س} - \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{ص} - \text{س} + \frac{\pi}{4} - 1 = 0$$

معادلة العمود عليه عند النقطة $(1, \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned} \text{ص} - 1 &= \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \\ \text{ص} - 1 &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \text{س} + \frac{\pi}{8} \\ 0 &= 1 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \text{س} + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

تمرين (٣ - ١)

(١) جد ميل المماس لمنحنى الدالة د (س) = س^٢ - ٣س + ١ عند النقطة (١ ، ٠) .

(٢) جد ميل منحنى الدالة د (س) = ٣ - س عند النقطة س = ١ .

(٣) اكتب معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الدالة ص = ٣س^٢ عند س = ٢ .

(٤) إذا كان المماس لمنحنى الدالة د (س) = س^٢ + ٥س عند

س = س_١ يصنع مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥° ، جد احداثي نقطة التماس .

(٥) جد احداثيات النقطة الواقعة على المنحنى ص = س^٢ + ٥س + ٣

بحيث يكون العمودي للمماس عندها موازياً للمستقيم $\frac{-س + ١}{٣}$

(٦) جد معادلتى المماس والعمودي عليه لمنحنى الدالة : ص = جا س +

$$\begin{aligned} \text{جتا س} \\ \text{عندما س} &= \frac{\pi^3}{4} \end{aligned}$$

(٧) جد معادلتى المماسين للمنحنى س^٢ + ص = ٥٢

الموازيين للمستقيم ٢س + ٣ص = جـ

(٨) جد معادلتى المماسين للمنحنى

س ص = ٨ والذين يوازيان المستقيم ص - ٢س = ٩

(٩) إذا كان المستقيم ١٣س - ص = ٧ ممس المنحنى ص =

أس^٢ + ب س^٢ عند النقطة (١ ، ٦) فما قيمة أ ، ب

(١٠) جد معادلة العمودى للمنحنى :

$$ص = س^2 - س \text{ عند } س = ٢ .$$

(١١) جد الزاوية بين المنحنيين :

$$د (س) = س^2 ، د (س) = \sqrt{س} \text{ عند النقطة } (١ ، ١)$$

(٣ - ٢) النهايات العظمى والصغرى :

من اهم تطبيقات التفاضل أنه يساعد على الحصول على معلومات هامة عن سلوك الدوال التى يمكن اشتقاقها في مجال تعريفها ، وهذا يساعد بشكل خاص على ايجاد رسم تخطيطى لمنحنيات تلك الدوال .

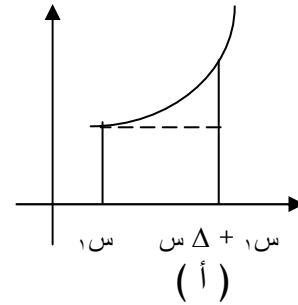
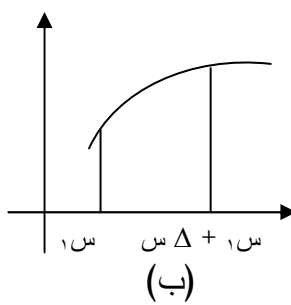
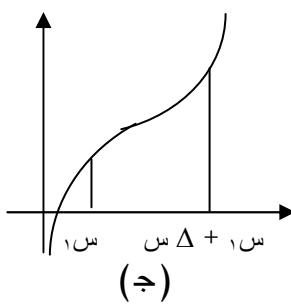
نصف الداله $ص = د (س)$ بأنها إما تزايدية وإما تناقصية ، أو لاتزايدية ولا تناقصية ونعرف هذه الحالات رياضياً كما يلى :

(١) تزايدية :

نقول إن الداله $ص = د (س)$ دالة تزايدية في مجال تعريفها إذا كان لكل $س_١ < س_٢$ $د (س_١) \leq د (س_٢)$ في هذه الحالة إذا كان $\Delta ص$ هو التغير الذى يحدث في الدالة $ص = د (س)$ الذى يقابل تغير $س$ من $س_١$ إلى $س_١ + \Delta س$ فإن :

$$\Delta ص \geq \frac{د (س_١ + \Delta س) - د (س_١)}{\Delta س} \Delta س$$

انظر الشكل (٣ - ١) .



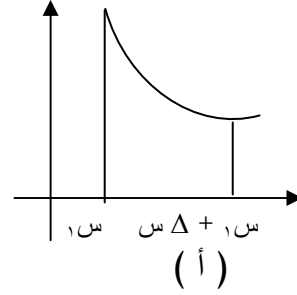
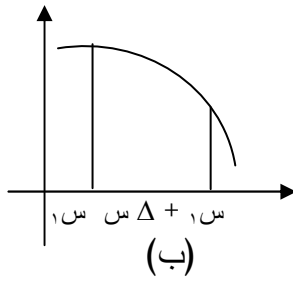
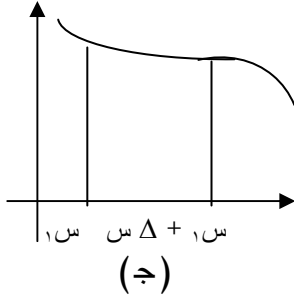
الشكل (٣ - ١)

(٢) تناقصية :

نقول إن الدالة $v = d(s)$ دالة تناقصية في مجال تعريفها إذا كان لكل $s_1 < s_2$ $d(s_1) \geq d(s_2)$. في هذه الحالة إذا كان Δv هو التغير في v المقابل لتغير s من s_1 إلى $s_1 + \Delta s$ فإن :

$$\Delta v \geq \frac{d(s_1 + \Delta s) - d(s_1)}{\Delta s} \Delta s$$

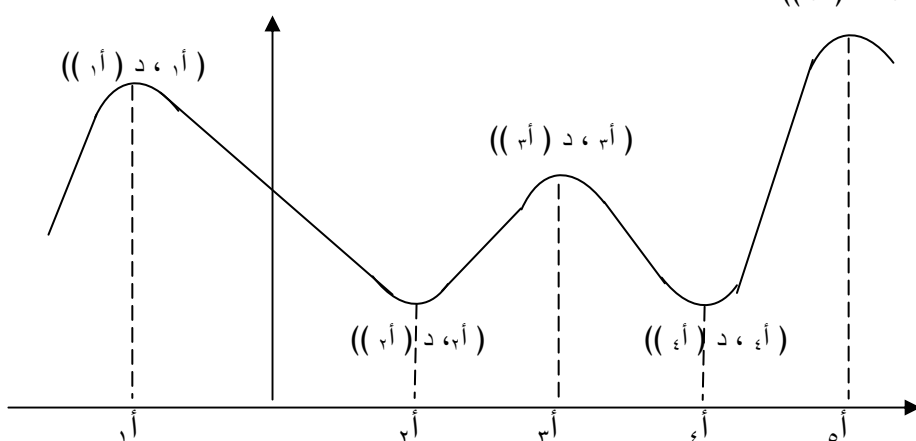
انظر الشكل (٣ - ٢) .



الشكل (٣ - ٢)

(٣) لاتزايدية ولا تناقصية :

في هذه الحالة تكون الدالة تزايدية في فترات وتناقصية في فترات أخرى ، كما هو موضح في الشكل (٣ - ٣) . ففي الشكل الدالة تزايدية .
 $((أه، د (أه))$



الشكل (٣ - ٣)

في الفترات التالية :

$$\{س : س \geq ١أ\}$$

$$\{س : ٢أ \geq س \geq ٣أ\}$$

$$\{س : ٤أ \geq س \geq ٥أ\}$$

وتناقصية في الفترات التالية :

$$\{س : ٢أ \geq س \geq ١أ\}$$

$$\{س : ٣أ \geq س \geq ٤أ\}$$

$$\{س : س \leq ٥أ\}$$

وتمثل النقاط $((أ١، د (أ١))$ ، $((أ٢، د (أ٢))$ ، ، $((أ٥، د (أ٥))$ النهايات العظمى والصغرى للدالة في تلك الفترات. فمثلا النقطة $((أ٣، د (أ٣))$ تمثل أعظم (أكبر) قيمة للدالة $ص = د(س)$ في الفترة:

$$\{س : ٢أ \geq س \geq ٣أ\}$$
 ، وكذلك للفترة $\{س : ١أ \geq س \geq ٢أ\}$

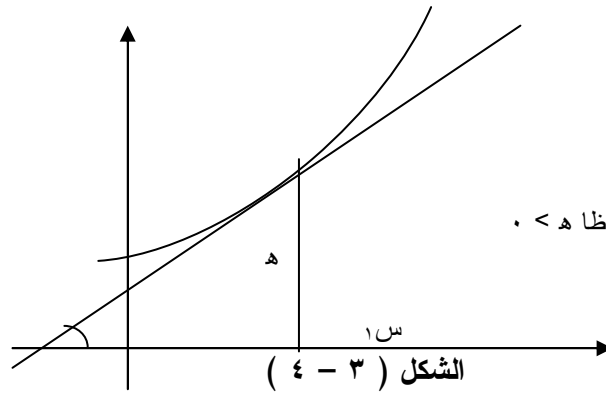
وبما أن هذه النقطة قد لاتمثل القيمة الأعظم (الأكبر) للدالة مطلقاً فإننا نسميها نهاية عظمى محلية ، حيث أنها بالتأكيد الاعظم من ضمن النقط التي تجاورها . ففي الشكل (٣ ، ٣) تسمى النقاط (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) و (٤ ، ٤) (٥ ، ٥) نهايات عظمى محلية للدالة $V = D(S)$ ، ونقول إن للدالة $V = D(S)$ نهايات عظمى محلية عند $S = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥$. كما نسمى النقاط (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) نهايات صغرى محلية للدالة $V = D(S)$ ، ونقول إن للدالة $V = D(S)$ نهايات صغرى محلية عند $S = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥$.

الآن ، كيف يمكن تصنيف الدالة على كونها تزايدية أو تناقصية أو غير ذلك من مشتقتها .

إذا كانت $D'(S_1) < 0$ صفر

$$\text{فهذا يعنى أن } \frac{\Delta V}{\Delta S} = \frac{D(S_1 + \Delta S) - D(S_1)}{\Delta S} < 0 .$$

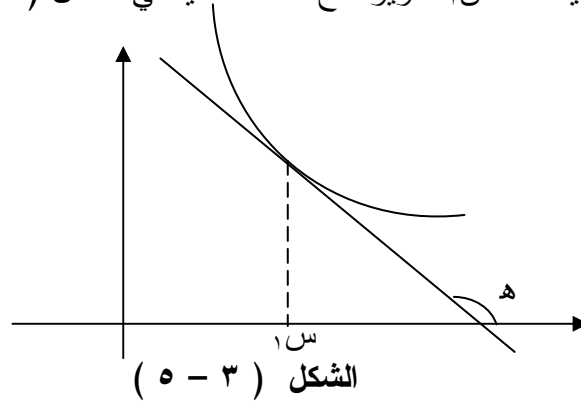
إذا كانت ΔS كانت قريبة جداً من الصفر وذلك لأن المشتقة ليست إلا نهاية لهذه القيمة ، إذن نستنتج من ذلك أن الدالة $V = D(S)$ تكون تزايدية عند S_1 . ويبين ذلك هندسياً بميل المماس الموجب ، حيث أنه يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . أنظر الشكل (٣ - ٤) .



أمّا إذا كانت $D'(S_1) > 0$ صفر فهذا يعنى أن :

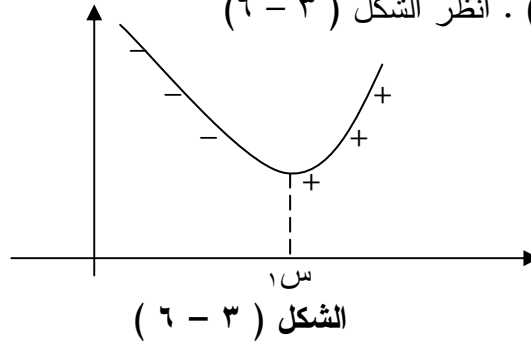
$$\bullet > \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{د} - (\Delta \text{س} + \text{س}_1) \text{د}}{\Delta \text{س}}$$

إذا كانت Δ س قريبة جداً من الصفر ويعنى ذلك أن الدالة $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ تكون تناقصية عند س_1 . ويوضح ذلك هندسياً في الشكل (٣ - ٥) .



أما إذا كانت $\text{د}'(\text{س}_1) = 0$ فهنالك ثلاث حالات :

الحالة الأولى: أن تكون $\text{د}'(\text{س}) > 0$ بجوار س_1 إلى اليسار منها ثم تصبح $\text{د}'(\text{س}) < 0$ بجوار س_1 إلى اليمين منها ونفسر $\text{د}'(\text{س}_1) = 0$ بأنها الحالة الوسطى في الانتقال من القيم السالبة إلى الموجبة. هذه الحالة تعنى أن الدالة كانت تناقصية إلى اليسار من س_1 ثم تحولت إلى تزايدية إلى اليمين منها . وهذه هي الحالة التي تمثل فيها النقطة $(\text{س}_1, \text{د}(\text{س}_1))$ نهاية صغرى محلية للدالة $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$. أنظر الشكل (٣ - ٦)



(تمثل + ، - إشارة المشتقة)

هنالك ملاحظة هامة يجدر بنا ذكرها الآن وهى أنه في هذه الحالة تكون المشتقة

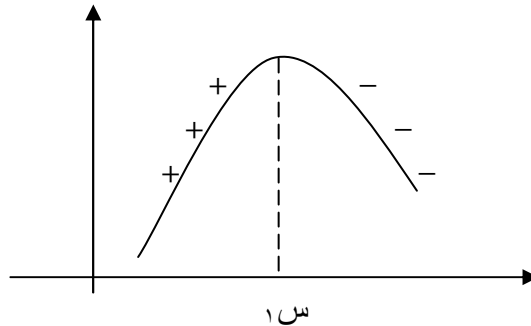
د' (س) تزايدية عند س_١ ويعرف ذلك بأن تكون المشتقة الثانية د'' (س) عند س_١ موجبة . (وذلك لأن المشتقة الثانية هى المشتقة الأولى للمشتقة الأولى وكون الثانية موجبة يشير إلى أن الأولى تزايدية) إذن نخلص إلى أنه إذا كانت:

$$د' (س_١) = \text{صفر}$$

$$د'' (س_١) < \text{صفر}$$

فإن النقطة (س_١ ، د (س_١)) نهاية صغرى محلية للدالة ص = د (س) .
الحالة الثانية:

أن تكون د' (س) < ٠ بجوار س_١ إلى اليسار منها ثم تصبح د' (س) > ٠ بجوار س_١ إلى اليمين منها . بنقاش مماثل لما دار في الحالة الأولى نخلص إلى أن النقطة (س_١ ، د (س_١)) تمثل نهاية عظمى محلية للدالة ص = د (س) .
يبين ذلك الشكل (٣ - ٧) .



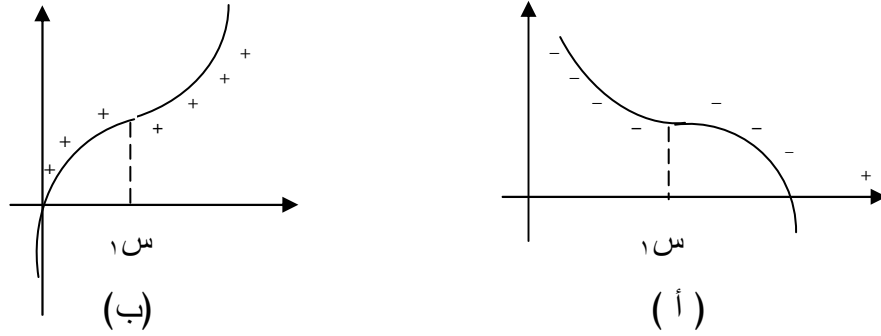
الشكل (٣ - ٧)

ونشير إلى ملاحظة مشابهة للحالة الأولى وهى أن المشتقة الأولى تكون

تناقصية في هذه الحالة (الثانية) ، ويؤكد ذلك بأن تكون المشتقة د'' (س) عند س_١ سالبة . عليه نخلص إلى أنه إذا كانت :

$$د' (س_١) = \text{صفر}$$

د" (س_١) > صفر
فإن النقطة (س_١، د (س_١)) نهاية عظمى محلية للدالة ص = د (س).
الحالة الثالثة : أن تكون د' (س) > ٠ بجوار س_١ إلى اليسار واليمين من س_١ وبجوارها أو تكون د' (س) < ٠ إلى اليسار واليمين من س_١ وبجوارها . كما هو موضح في الشكل (٣ - ٨) .



الشكل (٣ - ٨)

وفي هذه الحالة إما أن تكون الدالة تناقصية [الشكل (٣ - ٨) (أ)] أو تزايدية [الشكل (٣ - ٨) (ب)] ولكن طرأ عليها سكون لحظي عند س_١ ، وذلك عندما يوازي المماس المحور السيني . تسمى النقطة س_١ في هذه الحالة بنقطة إنقلاب للدالة ص = د (س) ، وليس هنالك شرط كافئ يؤكد معرفتنا بأن النقطة س_١ نقطة انقلاب . ولكن من الضروري في هذه الحالة أن يتحقق الشرط :

د" (س_١) = صفر
وإلا كانت (س_١، د (س_١)) عظمى أو صغرى. المثال التالي يدل على أن الشرطين:

$$د' (س_١) = صفر$$

$$د'' (س_١) = صفر$$

لا يكفیان لتكون (س_١، د (س_١)) نقطة انقلاب .

$$ص = د (س) = س^4$$

$$د' (س) = 4س^3$$

$$د'' (س) = 12س^2$$

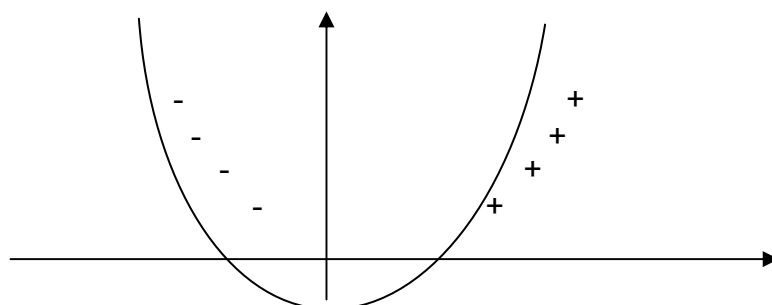
$$\therefore د' (0) = 0$$

$$د'' (0) = 0$$

ولكن د' (س) > صفر إلى اليسار من س = 0

د' (س) < صفر إلى اليمين من س = 0

مما يشير إلى أن النقطة (0, 0) تمثل نهاية صغرى للدالة
[أنظر الشكل (3 - 9)] .



الشكل (3 - 9)

تعريف (3 - 1) :

لتكن $ص = د (س)$ داله في س وأن $د' (س)$ معرفة . تسمى النقطة $(س, د (س))$ نقطة حرجة للدالة $ص = د (س)$ إذا كان $د' (س) = 0$ ونقول إن للدالة $ص = د (س)$ نقطة حرجة عند س = 0 .

تصنف النقاط الحرجة إلى :

نهايات عظمى (محلية) ، أو نهايات صغرى (محلية)
أو إلى نقاط انقلاب .

لتمييز النقطة الحرجة (س_١ ، د (س_١)) للدالة ص = د (س)
بعد تحقق الشرط د' (س_١) = صفر (:

(أ) إذا كانت د'' (س_١) < ٠ فإن (س_١ ، د (س_١)) نهاية صغرى محلية .
(ب) إذا كانت د'' (س_١) > ٠ فإن (س_١ ، د (س_١)) نهاية عظمى محلية .
(ج) إذا كانت د'' (س_١) = ٠ ، نحدد إشارة د' (س) بجوار س_١ إلى اليسار وإلى اليمين . أى نتحصل على إشارة د' (س_١ + هـ) ، د' (س_١ - هـ) .
حيث هـ < ٠ صغيرة صغراً كافياً (أى متناهية في الصغر بحيث لا
تتغير إشارة د' (س) بين س_١ - هـ و س_١ ولا بين س_١ و س_١ + هـ) ،
فإذا كانت :

(١) د' (س_١ - هـ) سالبة و د' (س_١ + هـ) موجبة فإن (س_١ ، د (س_١))
نهاية صغرى محلية .

(٢) د' (س_١ - هـ) موجبة و د' (س_١ + هـ) سالبة فإن (س_١ ، د (س_١))
نهاية عظمى محلية .

(٣) الاشارتان متشابهتين فإن (س_١ ، د (س_١)) نقطة انقلاب ، تكون
فيها الدالة تزايدية إذا كانتا موجبتين وتناقصية إذا كانتا سالبتين .

مثال (١) :

صنف النقاط الحرجة للدالة :

$$ص = د (س) = س^٣ - ٣ س^٢ - ٢٤ س + ١٢$$

الحل :

$$د' (س) = 3س^2 - 6س - 24$$

$$د' (س) = \text{صفر} \Leftrightarrow$$

$$3س^2 - 6س - 24 = 0$$

$$\text{أو } (س - 4)(س + 2) = 0$$

$$\therefore س = 4, س = -2$$

$$ص = د (س) = 3س^3 - 6س^2 - 24س + 12 = د (4) = 120$$

$$= 120 - 96 - 24 + 12 = 12$$

$$ص = د (س) = 3س^3 - 6س^2 - 24س + 12 = د (-2) = -12$$

$$= -12 + 24 + 48 - 12 = 48$$

$\therefore (4, 120), (-2, -12)$ نقطتان حرجتان للدالة $ص = د (س)$.

$$د'' (س) = 6س - 6$$

$$د'' (4) = 6 \times 4 - 6 = 18 > 0$$

$$د'' (-2) = 6 \times (-2) - 6 = -18 < 0$$

$\therefore (4, 120)$ نهاية صغرى محلية .

$(-2, -12)$ نهاية عظمى محلية .

مثال (2) :

جد معادلة المنحنى $ص = د (س) = 3س^3 + 2س^2 + 3س + د$

الذى يمر بالنقطة $(0, 4)$ ، وتمثل النقطة $(-1, 2)$ نقطة انقلاب له .

الحل :

$$د (س) = 3س^3 + 2س^2 + 3س + د$$

$$د' (س) = 9س^2 + 4س + 3 \dots\dots\dots (أ)$$

$$د'' (س) = 18س + 4 \dots\dots\dots (ب)$$

النقطة $(0, 4)$ تحقق معادلة المنحنى

$$\therefore 4 = د + 0 \times 3 + 0 \times 2 + 0 \times 3$$

∴ د = ٤ (١)
النقطة (١ - ، ٢) تحقق معادلة المنحنى (نقطة انقلاب)

∴ - أ + ب - ج + د = ٢ (٢)

من تعويض (١) في (٢) ينتج

- أ + ب - ج = ٢ - (٣)

∴ (١ - ، ٢) نقطة انقلاب فإن :

$$٠ = (١ -) ' د$$

$$٠ = (١ -) '' د$$

وبتعويض د' (١ -) ، د'' (١ -) في (أ) و (ب) نحصل على :

$$٣ - أ + ٢ ب - ج = ٠ (٤)$$

$$٦ - أ + ٢ ب = ٠ (٥)$$

بحل (٣) ، (٤) ، (٥) نحصل على أ = ٢ ، ج = ٦ ، ب = ٦

∴ معادلة المنحنى هي :

$$ص = ٢ س^٢ + ٦ س + ٦ س + ٤$$

مثال (٣) : (تطبيقي)

برميل ماء اسطوانى الشكل بدون غطاء يراد أن يكون سعته ٢٠٠ بوصه^٣ فما نصف قطر قاعدته الذى يمكننا من استعمال اقل كمية من المعدن لصنعه ؟

الحل :

كمية المعدن تعتمد على مساحة سطح البرميل م والتى تساوى :

$$م = \pi \text{ نق}^٢ + \pi ٢ \text{ نق ل}$$

حيث نق هو نصف قطر القاعدة و ل هو ارتفاع الاسطوانة .

حجم البرميل ح يعطى بـ :

$$ح = \pi \text{ نق}^٢ ل$$

ولكن ح = ٢٠٠ ، إذن :

$$ل = \frac{٢٠٠}{\pi \text{ نق}^٢}$$

$$\therefore م = \pi \text{ نق}^٢ + \pi^٢ \text{ نق} \times \frac{٢٠٠}{\pi \text{ نق}^٢}$$

$\therefore$ مساحة السطح م بدلالة نق تعطى بـ :

$$م = د (\text{نق}) = \pi \text{ نق}^٢ + \frac{٤٠٠}{\text{نق}}$$

$$\frac{د م}{د \text{نق}} = \pi^٢ \text{ نق} - \frac{٤٠٠}{\text{نق}^٢}$$

$$\frac{د م}{د \text{نق}} = ٠ \Leftarrow \text{نق}^٣ = \frac{٢٠٠}{\pi}$$

$$\therefore \text{نق} = \sqrt[٣]{\frac{٢٠٠}{\pi}}$$

$$\frac{د م}{د \text{نق}^٢} = \pi^٢ + \frac{٨٠٠}{\text{نق}^٣}$$

$$\text{عوض نق}^٣ = \frac{٢٠٠}{\pi} \text{ في الطرف الأيسر}$$

لنحصل على :

$$\frac{د م}{د \text{نق}^٢} = \pi^٢ + ٨٠٠ \times \frac{\pi}{٢٠٠} = \pi^٦ < \text{صفر}$$

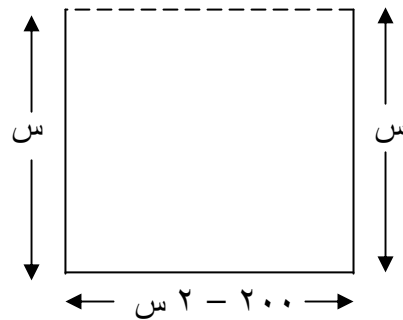
∴ عند نق $\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ تكون لمساحة السطح م نهاية صغرى ،
وهى الوحيدة . إذن إذا كان نصف قطر القاعدة $\sqrt[3]{\frac{200}{\pi}}$ فإن كمية المعدن
ستكون أقل ما يمكن لاستيعاب السعة ٢٠٠ بوصه ^٣ .

مثال (٤) : (تطبيقي)

سلك طوله ٢٠٠ متر . فما أكبر مساحة لحظيرة مستطيلة الشكل يمكن
أن يكفى السلك لإحاطة ثلاثة أضلاع منها .

الحل :

لنفرض أن طول أحد اضلاع الحظيرة يساوى س . [أنظر الشكل
(٣ - ١٠)]



الشكل (٣ - ١٠)

∴ طول الضلع الآخر = ٢ - ٢٠٠ س

∴ مساحة الحظيرة م = (٢ - ٢٠٠ س) × س

$$م = د (س) = ٢٠٠ س - ٢ س^2$$

$$\frac{د م}{د س} = ٢٠٠ - ٤ س$$

$$\frac{د م}{د س} = ٠ \leq س = ٥٠$$

$$٠ > -٤ = \frac{د^٢ م}{د س}$$

إذن عند $س = ٥٠$ تكون للمساحة م نهاية عظمى ، وهي الوحيدة .
 إذن للحصول على أكبر مساحة يجب أن يكون أحد الضلعين يساوى ٥٠
 متر والثانى يساوى ١٠٠ متر . إذن أكبر مساحة يمكن احاطتها بسلك طوله
 ٢٠٠ متر من ثلاثة أضلاع هي $١٠٠ \times ٥٠ = ٥٠٠٠$ متر مربع .

تمرين (٣ - ٢)

(١) صنف النقاط الحرجة للدوال التالية :

$$\begin{aligned} (أ) د (س) &= س^٢ \\ (ب) د (س) &= س^٣ - ٦س^٢ + ٩س - ٥ \\ (ج) د (س) &= (س - ٢) \sqrt[٣]{١ - س} \end{aligned}$$

$$(د) د (س) = \frac{س}{١ + س}$$

$$(هـ) د (س) = جا س$$

$$(و) د (س) = س^٣ + \frac{٤٨}{س} ، س \neq ٠$$

(٢) جد قيم أ ، ب ، ج بحيث يحقق المنحنى :

$$ص = أ س^٣ + ب س^٢ + ج س \text{ الشرطين التاليين :}$$

$$\begin{aligned} (أ) & \text{ يكون له نقطة إنقلاب عند } س = \frac{١}{٢} \\ (ب) & \text{ يمر بالنقطة } (١٣ ، ١) \end{aligned}$$

(٣) عددان مجموعهما ٦ فكم يكون العددان إذا اردنا أن نحصل على أصغر مجموع ممكن لمربعيهما ؟

(٤) جد أكبر حجم لأسطوانة دائرية مساحتها السطحية $\pi 24$. علماً بأن الاسطوانة مصمتة .

(٣ - ٣) تطبيقات في الميكانيكا :

إذا تحرك جسم بحيث يكون بعده f من نقطة ثابتة يعطى بالعلاقة $f = d(n)$. إذا تغير الزمن من n_1 إلى $n_1 + \Delta n$ يتغير البعد من f_1 إلى $f_1 + \Delta f$. إذن :

$$\frac{\Delta f}{\Delta n} = \frac{d(n_1 + \Delta n) - d(n_1)}{\Delta n}$$

هي السرعة المتوسطة التي يسير بها الجسم في الفترة من n_1 إلى $n_1 + \Delta n$. كلما صغرت Δn كلما كانت السرعة المتوسطة قريبة من سرعة الجسم v_1 عند n_1 .

$$\therefore v_1 = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{d(n_1 + \Delta n) - d(n_1)}{\Delta n}$$

وتسمى v_1 بسرعة الجسم اللحظية عند n_1 . تختلف v_1 باختلاف n_1 . إذن السرعة اللحظية في أى لحظة n داله في الزمن n وتعرف بأنها معدل تغير المسافة f بالنسبة للزمن n وتكتب :

$$v = \frac{df}{dn}$$

وبالمثل تعرف عجلة الجسم a بأنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن وتكتب .

$$a = \frac{dv}{dn} = \frac{d^2 f}{dn^2}$$

مثال (١) :

إذا كانت المسافة لنقطة مادية في أى لحظة تعطى بالمتر بالقانون
 $f = 2n^3 + 4n^2$. جد السرعة اللحظية والعجلة اللحظية للنقطة بدلالة n ،
 ثم جد السرعة والعجلة بعد ٢ ثانية من الابتداء .

الحل :

$$f = 2n^3 + 4n^2$$

$$v = \frac{df}{dn} = 6n^2 + 8n$$

$$a = \frac{dv}{dn} = 12n + 8$$

بعد ٢ ثانية :

$$v = 6 \times 2^2 + 8 \times 2 = 40 \text{ متر / ث}$$

$$a = 12 \times 2 + 8 = 32 \text{ متر / ث}^2$$

مثال (٢) :

إذا كانت السرعة ع لجسم متحرك تساوى $2n^3 + 4n^2$ (أ ثابت) ،
 وكانت العجلة بعد ٢ ث تساوى ٣ متر / ث^٢ ، فاحسب أ ثم جد بعد كم ثانية
 يتوقف الجسم عن الحركة .

الحل :

$$v = 2n^3 + 4n^2$$

$$a = 6n^2 + 8n$$

$$3 = 6n^2 + 8n \Rightarrow 3n^2 + 4n - 1 = 0$$

$$\therefore a = 6n^2 + 8n = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ أو } n = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore a = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ أو } n = -\frac{4}{3}$$

∴ $n = 0$ (وهذا عند بداية الحركة من السكون أو $n = 16$ ث وعندها يتوقف الجسم عن الحركة) .

تمرين (٣ - ٣)

(١) إذا كانت المسافة f لجسم مادي متحرك تعطى بـ $f = 5n^3 +$

$2n^2 + 3n$. جد السرعة والعجلة اللحظية لهذا الجسم بدلالة n .

(٢) إذا كانت المسافة f لجسم متحرك تعطى بـ $f = 3n^3 + 2n^2 + 3n$

(أ ، ب ثابتان) وكانت السرعة عند $n = 3$ ثانية تساوى

10 متر / ث وكانت العجلة عند $n = 1$ ثانية تساوى 5 متر / ث^٢ .

جد أ ، ب .

(٣) يتحرك جسم في خط مستقيم فيقطع مسافة f قدماً بعد n ثانية بحيث

$f = 5n^4 - 2n^3 + 5n^2$. جد الزمن الذي تتعدم فيه سرعته

وعجلته عندئذ .

(٤) يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث يكون بعده بالأمتار بعد n ثانية

من النقطة o هو $f = 2n^3 - 21n^2 + 60n - 2$. جد أقصى

بعد يصل إليه الجسم من النقطة o ، وعجلة الجسم عندئذ .

(٥) يتحرك حجر رأسياً لأعلى ولأسفل في خط مستقيم بحيث يكون ارتفاعه

عن سطح الأرض بعد n ثانية هو $f = 128n - 16n^2$ قدم جد :

(أ) سرعة الحجر عند أى لحظة .

(ب) أقصى ارتفاع يصل إليه الحجر .

(ج) سرعة الحجر الابتدائية .

(٦) يتحرك جسم بحيث تعطى ازاحته f عن نقطة ثابتة بدلالة الزمن

بالعلاقة $f = a + b(n + h)$ حيث a ، b ، h ثوابت . أثبت

أن العجلة تتناسب طردياً مع مقدار الازاحة .

(٦ - ٣) المعدلات الزمنية المرتبطة :

لنفرض أن v داله في المتغير s وترتبط به مباشرة أو ضمناً . إذا

كان كل من v و s داله في الزمن n . فبمعرفة معدل تغير s أو v

بالنسبة لـ n يمكن معرفة المعدل الآخر . نسمى $\frac{ds}{dn}$ ، $\frac{dv}{dn}$

بمعدلين مرتبطين تربطهما العلاقة التي تربط س و ص .
نعلم من مشتقة داله الداله ، أن :

$$\frac{د ص}{د ن} = \frac{د ص}{د س} \cdot \frac{د س}{د ن}$$

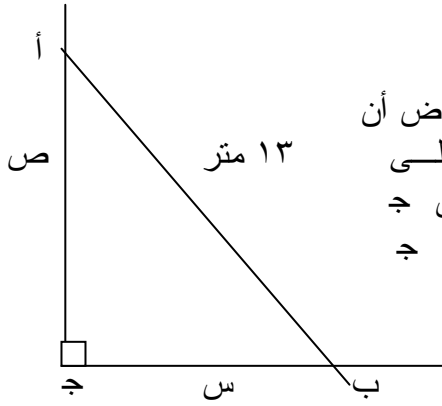
نستخدم هذه المعادلة في حل المسائل المتعلقة بالمعدلات المرتبطة .

مثال (١) :

سلم طوله ١٣ متراً يرتكز على حائط رأسى . فإذا كان أسفل السلم
يبعد عن قاعدة الحائط ٥ أمتار وبدأ ينزلق بمعدل ٤ متر / ث فما سرعة نزول
أعلى السلم عندئذ ؟

الحل :

أنظر الشكل (٣ - ١٥)



المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ج بافتراض أن
الحائط عمودى على الأرض إذا كان أعلى
السلم أ يبعد مسافة ص متر عن ج
وأسفله ب يبعد مسافة س متر عن ج
فإن :

$$س^2 + ص^2 = ١٦٩$$

الشكل (٣ - ١٥)

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ ن نجد أن :

$$٢ س = \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \frac{د ص}{د ن} = ٠$$

$$\text{عند س} = ٥ \text{ فإن ص} = ١٢, \quad \text{د س} = \frac{\text{د ن}}{\text{د ن}} = \text{د ن} = ٤$$

$$\therefore \text{د ن} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times ١٢ \times ٢ + ٤ \times ٥ \times ٢$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \frac{٤٠}{٢٤} = \frac{٥}{٣} \text{ م / ث}$$

$$\therefore \text{معدل نزول أعلى السلم أ هو } \frac{٥}{٣} \text{ م / ث}$$

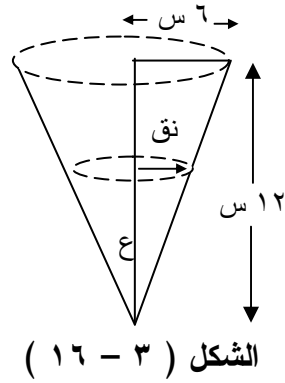
(الإشارة السالبة تعنى أن ص تنقص مع الزمن) .

مثال (٢) :

إناء على شكل مخروط دائرى قائم رأسه إلى أسفل وارتفاعه ١٢ سم ونصف قاعدته ٦ سم . ينسكب فيه الماء بمعدل ٣ سم / ث . جد معدل ارتفاع الماء عندما يكون عمقه ٤ سم .

الحل :

نفرض أن ع هو ارتفاع الماء في الاناء بعد ن ثانية وأن نق تمثل نصف قطر قاعدة الماء في الاناء بعد ن ثانية . أنظر الشكل (١٦ - ٣) .



من تشابه المثلثات :

$$\frac{\text{نق}}{٦} = \frac{ع}{١٢} \Leftarrow ع = ٢ \text{ نق}$$

حجم الماء في الاناء بعد ن ثانية يعطى بـ :

$$ح = \frac{١}{٣} \pi \text{ نق}^٢ ع$$

$$\frac{ع}{٢} = \text{نق} \text{ ولكن}$$

$$\therefore ح = \frac{١}{٣} \pi \left(\frac{ع}{٢} \right)^٢ \cdot ع$$

$$= \frac{\pi}{١٢} ع^٣$$

$$\therefore \frac{ح}{١٦ د} = \frac{\pi}{٤} ع^٢ \frac{د}{د ن} \quad \therefore$$

$$\frac{ح}{د ن} = ٣ \text{ سم}^٢ / \text{ث لكل ن} .$$

عندما يكون ع = ٤ سم فإن :

$$٣ = \frac{\pi}{٤} \times ١٦ \times \frac{د}{د ن}$$

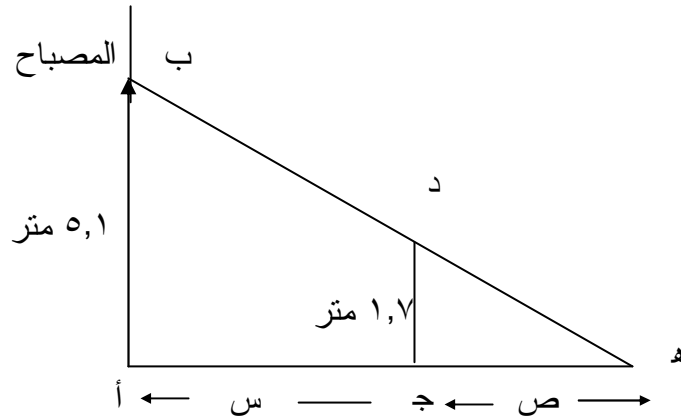
$$\therefore \frac{د}{د ن} = \frac{٣}{\pi ٤} \text{ سم / ث}$$

∴ معدل ارتفاع الماء عندما يكون الارتفاع ٤ سم يكون $\frac{٣}{\pi ٤} \text{ سم / ث}$

مثال (٣) :

رجل طوله ١٧٠ سم يمشى بمعدل ١,٥ متر / ث في شارع أفقي به مصباح معلق على ارتفاع ٥,١ متر من سطح الأرض . جد معدل تغير طول ظل الرجل على أرض الشارع إذا كان الرجل يسير على خط مستقيم مبتعداً عن المصباح .

الحل :



الشكل (٣ - ١٧)

في الشكل (٣ - ١٧) تمثل النقطة ب موقع المصباح ، أ النقطة الواقعة تحت المصباح على أرض الشارع نفرض أن الرجل عند اللحظة ن كان عند ج على بعد س من أ .

∴ أ ج = س

طول ظله عندئذ هو ج ه = ص

المطلوب هو إيجاد $\frac{دص}{دن}$ ، مع العلم بأن $\frac{دس}{دن} = ١,٥ م / ث$

طول الرجل بالأمتار = ١,٧

من تشابه المثلثين أ ب ه ، ج د ه

$$\frac{ص}{س + ص} = \frac{١,٧}{٥,١}$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{ص}{ص + س}$$

$$\therefore ص = \frac{1}{\frac{1}{3} - س}$$

$$\therefore \frac{د ص}{د ن} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{د س}{د ن} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1,5 \times \frac{1}{4} = 0,75 \text{ م / ث}$$

أى أن ظل الرجل يزداد طولاً بمعدل $\frac{3}{4}$ متر كل ثانية .

تمرين (٣ - ٤)

(١) كرة من المعدن تتمدد بالحرارة ، فإذا كان معدل تزايد نصف قطرها ٢ مم كل دقيقة ، فما معدل تزايد مساحة سطح الكرة ومعدل تزايد حجمها عندما يكون طول نصف القطر ٧ سم. (علماً بأن $ح = \frac{4\pi r^3}{3}$ م^٣ = $\frac{4}{3}\pi r^3$)

(٢) يجرى ولد بسرعة ٢ م/ث في مستقيم أفقى متجهاً نحو عمود ارتفاعه ٦ متر . جد معدل تغير المسافة بين الولد وقمة العمود عندما يكون الولد على بعد ٨ متر من قاعدة العمود .

(٣) ولد طوله ل يمشي بسرعة ع في الشارع في اتجاه مصباح ارتفاعه م جد معدل تغير طول ظل الولد عندما يكون على بعد ف من قاعدة عمود المصباح .

(٤) تتحرك نقطة على المنحنى $س^٢ + ص^٢ = ٨$ عين موضع النقطة في اللحظة التى يكون فيها $\frac{د س}{د ن} = \frac{د ص}{د ن}$.

(٥) بالون كروي يتسرب منه الغاز بمعدل ١٨ سم^٣/ث. جد معدل تناقص نصف قطر البالون في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطره يساوى ١٢ سم. ثم جد معدل تناقص مساحة سطحه عندئذٍ.

- (٦) يتساقط الرمل مكوناً كومة على شكل مخروط دائري قائم بمعدل ٦ سم^٣/ث. فإذا كان قطر قاعدة المخروط يساوى ارتفاعه جد معدل المتغير في ارتفاع مخروط الرمل في اللحظة التي يكون فيها هذا الارتفاع يساوى ٨ سم.
- (٧) بالون على ارتفاع ١٠٠ متر يرتفع بمعدل ثابت يساوى ٥ متر/ث وتمر من تحته سيارة تسير في خط مستقيم بسرعة ثابتة ٢٠ متر/ث. ما سرعة السيارة بالنسبة للبالون بعد دقيقة من مرور السيارة تحت البالون؟

الوحدة الرابعة



أهداف الوحدة الرابعة

بعد دراسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن :-

- ١ . يتعرف مفهوم التكامل كعملية عكسية للتفاضل .
- ٢ . يتعرف تكامل النسب المثلثية .
- ٣ . يتعرف تطبيقات على التكامل في الهندسة التحليلية والحركة .
- ٤ . يتعرف بعض طرق التكامل (مثل التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئة) .

(٤) التكامل

(١ - ٤) التكامل كعملية عكسية للتفاضل :

في التفاضل نعطي الدالة v في متغير ما s مثلاً ويطلب منا إيجاد

$\frac{dv}{ds}$. في العملية العكسية نعطي $\frac{dv}{ds}$ ويطلب منا إيجاد الدالة v .

هذه العملية العكسية تسمى بالتكامل فمثلاً إذا اعطينا .

$$\frac{dv}{ds} = 2s$$

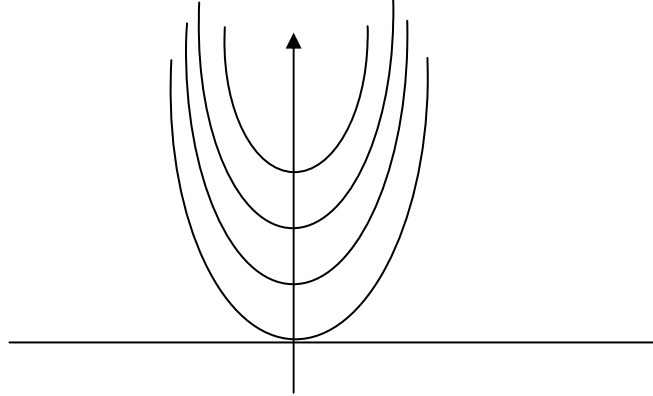
بسهولة يمكن إيجاد $v = 2s^2$ ، وبملاحظة خاطفة نجد أن v يمكن أن تساوي $s^2 + 1$ أو $s^2 - 1$ أو $s^2 + A$ وبصورة عامة $v = s^2 + C$ (C ثابت) كلها تمثل حلاً لإيجاد v إذا كان :

$$\frac{dv}{ds} = 2s$$

إذا نظرنا لذلك من الناحية الهندسية نرى أنه قد طلب منا إيجاد الدالة

$v = C$ (s) إذا كان ميل المماس $\frac{dv}{ds} = 2s$. الشكل (١ - ٤)

يعطي مجموعة المنحنيات التي تمثل الحل .



الشكل (١ - ٤)

وبصورة عامة نفترض أن :

$$ص = د (س)$$

$$فإذا كان \frac{د}{س} = ر (س)$$

فإننا نقول إن ص هي تكامل ر (س) بالنسبة لـ س وتكتب

$$ص = \int ر (س) د س$$

ويساوى ذلك د (س) + ث حيث ث أى ثابت يسمى ثابت التكامل .

مثال (١) :

كامل (جد تكامل) الدالة $س^٣ + ١$.

الحل :

$$\int (س^٣ + ١) د س = \frac{س^٤}{٤} + س + ث$$

$$\text{لأن } \frac{د}{د س} = \left(\frac{س^٣}{٤} + س + ث \right) \Rightarrow ١ + س^٣ =$$

الآن لكل ن $١ - \neq$

$$\frac{د}{د س} (س^{١+ن}) = (س^{١+ن} + ن + ١) س^{ن}$$

$$\text{أو } \frac{د}{د س} = \left(\frac{س^{١+ن}}{١+ن} \right) س^{ن}$$

عليه فإن :

$$\left[\text{س}^{\text{ن}} \text{ د س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن} + 1} + \text{ث} \right]$$

مثال (۲) :

$$\left[\text{س}^8 \text{ د س} = \frac{\text{س}^{8+1}}{1 + 8} + \text{ث} \right]$$

$$\text{ث} + \frac{\text{س}^9}{9} =$$

$$\left[4 \text{ س}^{\circ} \text{ د س} = 4 \times \frac{1}{4} \text{ س}^6 + \text{ث} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \text{ س}^6 + \text{ث}$$

مثال (۳) :

جد :

$$(ا) \left[(\text{س}^3 + \frac{1}{\text{س}^3}) \text{ د س} \right]$$

$$(ب) \left[(\frac{1}{\text{س}^6} + \sqrt{\text{س}}) \text{ د س} \right]$$

$$(ج) \left[(\text{س} - \frac{1}{\text{س}}) \text{ د س}^2 \right]$$

الحل :

$$(أ) \quad \left[(س^۲ + \frac{۱}{س^۳}) د س \right]$$

$$= \left[(س^۲ + س^{-۳}) د س \right]$$

$$= \frac{۱}{۴} س^۴ - \frac{۱}{۲} س^{-۲} + ث$$

$$= \frac{س^۴}{۴} - \frac{۱}{۲ س^۲} + ث$$

$$(ب) \quad \left[(\frac{۱}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}) د س \right]$$

$$= \left[(س^{\frac{۱}{۲}} + س^{\frac{۱}{۲}}) د س \right]$$

$$= \frac{س^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} + \frac{س^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}} + ث$$

$$= \frac{۲}{۳} س^{\frac{۳}{۲}} + ۲ س^{\frac{۱}{۲}} + ث$$

$$= \frac{۲}{۳} \sqrt[۳]{س} + ۲ \sqrt{س} + ث$$

$$(ج) \quad (س - \frac{1}{س})^2 د س$$

$$= (س^2 - 2 + \frac{1}{س^2}) د س$$

$$= \frac{س^3}{3} - 2س + \frac{س}{1-}$$

$$= \frac{س^3}{3} - 2س + \frac{1}{س} + ث$$

تلاحظ أن التكامل يعتمد بصورة مباشرة على معرفتنا بالصيغ الأساسية في التفاضل ، وبمقتضى ما درسناه في التفاضل يجب علينا معرفة هذه الصيغ الأساسية الموضحة في الجدول (٤ - ١) والتي يمكن إثباتها مباشرة بأجراء التفاضل .

الدالة	تكاملها بالنسبة لـ س
$س^n$	$\frac{س^{n+1}}{n+1} + ث ، \quad n \neq -1$
جا أس	$-\frac{1}{آ} جتا أس + ث$
جتا أس	$\frac{1}{آ} جا أس + ث$
قا ^٢ أس	$\frac{1}{آ} ظا أس + ث$

قٲا٢ أس	$\frac{1}{3} - \text{ظٲا أس} + \text{ث}$
قا أس ظا أس	$\frac{1}{3} - \text{قا أس} + \text{ث}$
قٲا أس ظٲا أس	$\frac{1}{3} - \text{قٲا أس} + \text{ث}$

جدول (٤ - ١)

مثال (٤) :

جد :

(أ) [جا ٧ س د س

(ب) [جا ٢ س جٲا س د س

الحل :

(أ) من الجدول :

[جا ٧ س د س = $\frac{1}{3} - \text{جٲا ٧ س} + \text{ث}$

(ب) جا ٢ س جٲا س ليست مع الصيغ الأساسية ولكن

جا ٢ س جٲا س = $\frac{1}{3} [\text{جا ٣ س} + \text{جا س}]$

إذن : [جا ٢ س جٲا س د س = $(\frac{1}{3} \text{ جا ٣ س} + \frac{1}{3} \text{ جا س})$ د س

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4} \text{ جتا س} \right) + \left(\frac{1}{4} \text{ جتا س}^3 \right) + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ جتا س}^3 - \frac{1}{4} \text{ جتا س} + \text{ث}$$

تمرین (۴ - ۱)

(۱) جد التکاملات الآتية :

(أ) $\int s^7 ds$

(ب) $\int \frac{s^{1-3}}{s} ds$

(ج) $\int (n + \frac{1}{n})^2 dn$

(د) $\int (s^3 - 1)(s + 1) ds$

(هـ) $\int \tan^2 s ds$

(و) $\int \sec^2 s ds$

(تلميح : جتا ۲ س = ۱ - جا ۲ س)

(۲) إذا كان $\frac{ds}{dt} = 2s^2$ ، جد العلاقة بين س و ص عندما ص = ۱ ،
س = ۱

(۳) ص = د (س) منحنى يمر بالنقطة (۳ ، ۴) ويساوى ميله ۲ س - ۱ عند كل نقطة (س ، ص) . جد د (س) .

تطبيقات (٢-٤) :-

سبق ان عرفنا ان المشتقة الأولى للدالة $v = d(s)$ عند أي نقطة (s, v) على منحنى هذه الدالة تعنى ميل المماس للمنحنى عند تلك النقطة. عليه يكون إذا أعطينا ميل المماس بدلالة s فان تكامل الميل يعنى معادلة المنحنى. ولإيجاد ثابت التكامل لابد من معرفة إحدى النقاط أو أي شرط آخر التي يمر بها المنحنى وبتعويضها نحصل على قيمة الثابت. كما في الأمثلة التالية :-

مثال (١) :

جد معادلة المنحنى $v = d(s)$ الذي يمر بنقطة الأصل ويساوى ميله $3 - 2s^2$

الحل :

$$\frac{dv}{ds} = 3 - 2s^2$$

$$\therefore v = \int (3 - 2s^2) ds$$

$$\therefore v = 3s - \frac{2}{3}s^3 + C \quad (C \text{ ثابت})$$

المنحنى يمر بنقطة الاصل . إذن $v = 0$ عندما $s = 0$ إذن $C = 0$.

$$\therefore \text{المعادلة هي } v = 3s - \frac{2}{3}s^3$$

مثال (٢) :

جد معادلة المنحنى $v = d(s)$ إذا كان ميل المماس عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $m = 1 + s^2$ وكان المنحنى يمر بالنقطة $(0, 1)$.

الحل :

$$\text{بما أن } m = 1 + s^2$$

$$\text{أي أن } \frac{ع}{س} = \text{جا}^2 س + ١$$

$$\therefore \text{ص} = \text{جا}^2 س + ١ \text{ د س}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{١}{٢} \text{جتا}^2 س + س + \text{ث}$$

المنحنى يمر بنقطة (١، ٠)

$$\therefore ١ = \frac{١}{٢} \text{جتا}^2 ٠ + ٠ + \text{ث}$$

$$\therefore \text{ث} = \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore \text{معادلة المنحنى : ص} = س - \frac{١}{٢} \text{جتا}^2 س + \frac{٣}{٢}$$

تمرين (٤ - ٢)

(١) ص = د(س) منحنى يمر بالنقطة (٣، ٤) ويساوى ميله $٢س - ١$ عند

كل نقطة (س، ص)

جد د(س).

(٢) جد معادلة المنحنى الذي ميله عند أي نقطة عليه يساوى $(٢س - ٢)$ إذا

كان المنحنى يمر بالنقطة (٢، ٣).

(٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى ما عند أي نقطة عليه علماً بأنه يمر

بالنقطة (٣، ١).

(٤) منحنى يمر بالنقطة (٢، ٨) وميله عند أي نقطة عليه يساوى $(٣س + ١)^2$

جد معادلته.

(٥) جد معادلة المنحنى الذي يقطع المحور السيني عند $س = ١$ ، $-\frac{٤}{٣}$

إذا علمنا أن $س^٤ = (١٨ - ص)$ عند أي نقطة (س، ص)

على المنحنى .

(٦) إذا كانت $v' = s^2 - \sqrt{3} s$ ، أ ثابت ، $v = 0$ عندما $s = 0$ وعندما $s = \sqrt{3}$. جد v بدلالة s ثم ارسم منحنى الدالة v .

(٧) ميل منحنى يمر بالنقطة (٢،١) هو $\frac{v}{s} = \frac{v}{s}$ جد معادلة المنحنى

(٤ - ٣) تطبيقات التكامل في الحركة :

عرفنا سابقاً أنه إذا تحرك جسم في خط مستقيم فإن المسافة f التي يقطعها في زمن قدره n ثانية تعطى بالعلاقة $f = (n)$. وأن المشتقة الأولى لهذه الدالة

$$\frac{df}{dn} \text{ تعنى السرعة التي يتحرك بها الجسم عند أي لحظة } n.$$

وأن مشتقة السرعة $\frac{dv}{dn}$ تعنى العجلة j لحركة الجسم عند أي لحظة n .

عليه يكون تكامل العجلة يعطى السرعة التي يتحرك عليها الجسم . وتكامل السرعة يعطى المسافة التي يقطعها الجسم عند أي لحظة n . ولإيجاد الثوابت التي تنتج عن التكامل يجب معرفة المسافة أو السرعة عند أي لحظة معينة كما في الأمثلة التالية :-

مثال (١) :

تحرك جسم من النقطة o في خط مستقيم وكانت سرعته v بعد زمن n تعطى بـ $v = 2n - n^2$. جد المسافة f التي يقطعها الجسم بعد 2 ثانية من النقطة o .

الحل :

$$v = \frac{df}{dn} = 2n - n^2 \Rightarrow f = \int v \, dn$$

$$\therefore \text{ف} = [(2\text{ن} - 2\text{ن})] \text{ د ن}$$

$$\therefore \text{ف} = 2\text{ن} - \frac{1}{3}\text{ن} + \text{ث} \quad (\text{ث ثابت})$$

ولكن ف = صفر عند ن = صفر
(لأن الجسم تحرك من و)
إذن :

$$\text{ف} = 2\text{ن} - \frac{1}{3}\text{ن}$$

إذن المسافة بعد ٢ ثانية تكون :

$$\text{ف} = 2\text{ن} - \frac{1}{3}\text{ن} = 2 \times 2 - \frac{1}{3} \times 2 = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ وحدة .}$$

مثال (٢) :

تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بعجلة قدرها ١٨ - ٢ مترات^٢ في نهاية زمن قدره ٢ ثانية. فإذا بدأت الحركة من نقطة ثابتة بسرعة ابتدائية قدرها ٢٠ مترات. جد سرعتها وبعدها عن النقطة الثابتة في نهاية زمن قدره ٣ ثوان.

الحل :

$$\text{العجلة ج} = 18 - 2$$

$$\therefore \text{السرعة ع} = [(18 - 2\text{ن})] \text{ د ن}$$

$$= 18 - 2\text{ن} + \text{ث}$$

السرعة الابتدائية تساوي ٢٠ مترا عند ن = ٠

$$\therefore \text{ث} = 20$$

$$\therefore \text{ع} = 18 - 2\text{ن} + 20$$

$$\text{المسافة ف} = [\text{ع د ن}]$$

$$= \{ (٨١ - ٩ - ٢٠) \text{ د ن} \}$$

$$= ٩ - ٩ - ٢٠ + \frac{٢٠}{٣} + ٢٠ \text{ ث} =$$

بدأت النقطة الحركة من النقطة الثابتة

$$\therefore \text{ف} = ٠ \text{ عند ن} = ٠$$

$$\therefore \text{ث} = ٢٠$$

$$\therefore \text{ف} = ٩ - ٩ - ٢٠ + \frac{٢٠}{٣} + ٢٠$$

$\therefore$ المسافة بعد ٣ ثوانٍ

$$\text{ف} = ٩ \times ٩ - \frac{٢٧}{٣} + ٣ \times ٢٠$$

$$= ٨١ - ٩ + ٦٠ = ١٣٢ \text{ متراً.}$$

تمرين (٤ - ٣)

(١) تعطى السرعة ع مترات لنقطة مادية تتحرك على خط مستقيم في نهاية

$$\text{زمن قدره ن ثانية بالعلاقة } ٣ - ٢ + ١ =$$

جد العجلة عند ن = ٢ ث. والمسافة التي تقطعها بين ن = ٢ ث و ن = ٣ ث

(٢) تتحرك سيارة من السكون بعجلة متغيرة تساوى (١ - ٣ ن) مترات بعد

زمن قدره ن ثانية.

جد كلاً من السرعة والمسافة التي تقطعها بدلالة الزمن ن.

(٣) يتحرك جسم على المحور السيني (وس) مبتدئاً حركته نقطة الأصل و.

وبعد ن ثانية كانت سرعته ٣ ن + ٢ مترات. جد بعده عن نقطة الأصل

بعد ثانييتين.

(٤) تتحرك نقطة مادية من السكون عند الانطلاق بعجلة قدرها ١٢ - ٦ مترات^٢. جد أقصى بعد لها عن نقطة الانطلاق قبل أن يعود لها مرة أخرى. جد أيضاً زمن العودة إلى نقطة الانطلاق.

(٥) إذا كانت عجلة جسم جـ بعد ن من الثواني تعطي بالقاعدة جـ = ٤ + ٦ن. جد المسافة التي يقطعها بعد ٣ ثوان من بدء الحركة إذا كانت سرعته الابتدائية ٢ مترات وأنه قطع مسافة ٢١ متراً في أول ثانيتين من بدء الحركة.

(٦) يتحرك جسم على المحور السيني بسرعة ابتدائية ع. وإذا كانت مسافته من نقطة البداية عند الزمن ن تساوى ف وسرعته ع وكان يتحرك بعجلة ثابتة مقدارها جـ. أثبت أن :

$$ع = ع. + جـ ن$$

$$ف = ع. ن + \frac{1}{2} جـ ن^2$$

واستنتج أن :

$$ع^2 = ع. + 2 جـ ف$$

(٤ - ٤) بعض طرق التكامل :

من الفصل السابق اتضح أنه إذا لم تكن حدود الدالة المراد تكاملها من الصور القياسية فإنه لابد من التصرف في تحويل الداله إلى صورة مكافئة تمكن من ايجاد تكاملها فعلنا ذلك في تكامل جا ٢ س جتا س في أمثلة الفصل السابق ، ولمحنا في التمرين السابق لتكامل جا^٢ س إلى استخدام جتا ٢ س = ١ - جا^٢ س ليتحول التكامل إلى : $\int (1 - \sin^2 s) ds$ (١ - جتا ٢ س) د س والحدان داخل التكامل يمكن تكاملها بالصور القياسية . ونتوقع أن يكون قد حاولت كتابة قا^٢ س - ١ بدلاً عن طا^٢ س في التمرين السابق .

(أ) التكامل بالتعويض :
لإيجاد التكامل

$$\int (5س + 3) دس$$

نكتب $\int (5س + 3) دس = \int 25س + 30س + 9 دس$
ثم نجر التكامل المطابق

$$\int (25س + 30س + 9) دس$$

$$= \frac{25}{2}س^2 + 15س + 9ث$$

لكن إذا حاولنا نفس الطريقة لإيجاد التكامل $\int (5س + 3) دس$ مثلاً فإن ذلك يستغرق وقتاً طويلاً لفك القوس $\int (5س + 3) دس$ بذات الحدين ثم نتحمل عناء إجراء التكامل لـ ١١ حد .

الآن إذا عوضنا $5س + 3 = د$ فإن :

$$د = \frac{دع}{دس}$$

$$\therefore دس \equiv \frac{دع}{د}$$

عليه يتحول التكامل إلى :

$$\int (5س + 3) دس \equiv \int د \cdot \frac{دع}{د}$$

$$= \int د \cdot \frac{دع}{د} = \frac{دع}{11} + ث$$

$$= \frac{(5س + 3)}{11} + ث$$

فالتعويض طريقة نستخدم لتحويل التكامل إلى صورة من الصور القياسية أو إلى صورة يسهل تحويلها إلى صورة قياسية .
بصورة عامة يمكن أن نستنتج أن :

$$\left[(أ س + ب)^{ن+1} د س = \frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{(ن+1)أ} + ث \right] \quad (ن \neq -1)$$

مثال (١) :
اجر التكاملات الآتية .

$$(أ) \int \sqrt[3]{س + 1} د س \quad (ب) \int (س + ٤)^٤ د س$$

الحل :

$$(أ) \text{ضع } ع = س + ١$$

$$٣ = \frac{د ع}{د س}$$

$$\therefore د س = \frac{د ع}{٣}$$

$$\therefore \int \sqrt[3]{س + 1} د س = \int ع^{\frac{1}{3}} \frac{د ع}{٣}$$

$$= \frac{ع^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + ث = \frac{٣}{٤} (س + ١)^{\frac{4}{3}} + ث$$

$$\begin{aligned} \text{(ب) ضع } \epsilon &= 1 + s \\ \therefore \frac{\epsilon}{ds} &= \frac{1}{ds} = \frac{1}{\epsilon} \\ \therefore [\text{جا } (1 + s)] \frac{1}{\epsilon} &= \text{دع} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\epsilon} (- \text{جتا } \epsilon) + \text{ث}$$

$$= - \frac{1}{\epsilon} \text{جتا } (1 + s) + \text{ث}$$

مثال (٢) :

لتكن $r(s)$ دالة في s قابله للاشتقاق . أثبت أن

$$[r(s) r'(s)] \frac{1}{2} = \text{دع} + \text{ث}$$

الحل :

$$\text{ضع } \epsilon = r(s)$$

$$\therefore \frac{\epsilon}{ds} = r'(s) \Leftrightarrow \text{دع} = r'(s)$$

باستخدام ϵ يصبح التكامل :

$$[\text{دع} \text{دع}] \frac{1}{2} = \text{ث} + \frac{\epsilon^2}{2}$$

$$= \frac{[r(s) r'(s)]}{2} + \text{ث} .$$

يمكن اعتبار المثال السابق نتيجة عامة يستفاد منها في إيجاد بعض التكاملات .

مثال (٣) :
اجر التكامل

$$[\text{ظا س قا}^2 \text{ س د س}]$$

الحل :
ضع $\text{ع} = \text{ظا س}$ ، إذن $\text{د ع} = \text{قا}^2 \text{ س د س}$

$$\therefore [\text{ظا س قا}^2 \text{ س د س}] = [\text{ع د ع}]$$

$$= \frac{\text{ع}^2}{2} + \text{ث}$$

$$= \frac{\text{ظا}^2 \text{ س}^2}{2} + \text{ث}$$

هنالك نتيجة مماثلة وهى أنه إذا كان :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}} (\text{ت س}) = \text{د (س)}$$

فإن :

$$[\text{د (ر س) (ر س) }] = \text{ر (س) د س}$$

$$= \text{ت (ر س)} + \text{ث}$$

بالتعويض :

$$\text{ع} = \text{ر (س)}$$

$$\text{د ع} = \text{ر (س) د س}$$

يصبح التكامل :

$$[d((r(s))' r(s) ds = d((e) d e$$

$$= t(e) + t(r(s)) +$$

مثال (٤) :

$$\text{أجر } [\sqrt{1+s^2} ds$$

الحل :

$$\text{ضع } e = s^2, \quad d e = 2s ds$$

$$\therefore s ds = \frac{de}{2}$$

$$\therefore [\sqrt{1+s^2} ds$$

$$= \frac{1}{2} [\sqrt{1+e} de$$

$$= \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + t =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(1+s^2)^3} + t$$

مثال (٥) :

اجر [ح° س د س

الحل :

$$\begin{aligned} \text{جا° س} &= \text{جا° س جا س} \\ &= (١ - \text{جتا° س}) \text{ جا س} \\ \therefore [\text{جا° س د س} \end{aligned}$$

$$= [(١ - \text{جتا° س}) \text{ جا س د س}$$

ضع ع = جتا س

∴ د ع = - جا س د س

$$\therefore [\text{جا° س د س} = - [(١ - \text{جتا° س}) \text{ د ع}$$

$$= - [(١ - ٢ \text{ ع} + \text{ع}^٢) \text{ د ع}$$

$$= - [\text{ع} - \frac{٢}{٣} \text{ ع}^٣ + \frac{١}{٥} \text{ ع}^٥] + \text{ث}$$

$$\therefore [\text{جا° س د س} = - (\text{جتا س} - \frac{٢}{٣} \text{ جتا° س} + \frac{١}{٥} \text{ جتا° س}) + \text{ث}$$

[بتعويض ع = جتا س]

(ب) التكامل بالتجزئة :

إذا كانت ل ، ع دالتين في س فإن :

$$\frac{د}{دس} (ل ع) = \frac{د ل}{دس} ع + ل \frac{د ع}{دس}$$

بتكامل الطرفين بالنسبة لـ س

$$ل ع = ل ع \frac{دل}{دس} دس + ل ل \frac{دع}{دس} دس$$

$$\therefore ع \times \frac{دل}{دس} دس = ل ع - ل ل \frac{دع}{دس} دس$$

نستخدم هذه الصيغة في الحالات التي يستعصى فيها ايجاد تكامل الدالة

$$ع \frac{دل}{دس} ، بينما يكون من الممكن ايجاد تكامل ل ل \frac{دع}{دس}$$

مثال (٦) :

$$\text{اجر } ل س جتا س دس$$

الحل :

$$\text{ضع } ع = س \therefore \frac{دع}{دس} = ١$$

$$\frac{دل}{دس} = جتا س \therefore ل = جاس$$

$$\therefore ل ع \frac{دل}{دس} دس = ل ع - ل ل \frac{دع}{دس} دس$$

فإن :

$$ل س جتا س دس = س جاس - ل جاس دس$$

$$= س جاس + جتا س + ث$$

تمرین (٤ - ٤)

اجر التکاملات الآتية :

$$(١) \int \frac{دس}{١-س٥} \sqrt{}$$

$$(٢) \int \text{قتا}^٢ (٥ + س٢) دس$$

$$(٣) \int \text{جا}^٢ (٥ + س٢) دس$$

$$(٤) \int \frac{١ + س٢}{١-س٢+س٢} دس \sqrt{}$$

$$(٥) \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^٣س} دس$$

$$(٦) \int \text{جتا}^٤س \text{جاس} دس$$

$$(٧) \int \text{ظتا}^٣س \text{قتا}^٢س دس$$

$$(٨) \quad] \text{ جا } ٥ \text{ س جا } ٣ \text{ س د س}$$

$$(٩) \quad] \text{ س } \sqrt{٢ - \text{س}} \text{ د س} \quad ، \quad \text{عوض بـ} = ٢ - \text{س}$$

(١٠) مستخدماً التكامل بالتجزئة جد ما يأتي :-

$$(أ) \quad] \text{ س }^٢ \text{ جتا س د س} \quad (ب) \quad] \text{ س جا س د س}$$

$$(ج) \quad] \text{ س جتا أس د س}$$

الوحدة الخامسة



أهداف الوحدة الخامسة

بعد دراسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن :-

- ١ . يتعرف التكامل المحدد .
- ٢ . يتعرف تطبيقات على التكامل المحدد (المساحات) .

(٥) التكامل المحدد وتطبيقاته

(٥ - ١) التكامل المحدد :

أفرض $v = d(s)$ داله معرفه في الفترة $[a, b]$.

$$\left[d(s) = ds = r(s), \quad r'(s) = d(s) \right]$$

$$\left[d(s) = ds = r(b) - r(a) \right]$$

يسمى هذا النوع من التكامل بالتكامل المحدد .

مثال (١) :

جد قيمة :

$$(a) \int_0^1 (s^2 + s) ds$$

$$(b) \int_0^1 (s^2 - 2) ds$$

الحل :

$$(a) \int_0^1 (s^2 + s) ds = \left[\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} \right]_0^1$$

$$\frac{{}^2_1}{{}_2} - \frac{{}^4_1}{4} - \left[\frac{{}^2_2}{{}_2} + \frac{{}^4_2}{4} \right] =$$

$$\left[\frac{1}{{}_2} + \frac{1}{4} \right] - [2 + 4] =$$

$$5 \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - 6 =$$

$$(ب) \quad {}^3 \left[{}^2_3 - \frac{{}^3_3}{{}_3} \right] = {}^3_3 (2 - 1) \text{ د س}$$

$$\left[0 \times 2 - \frac{{}^2_0}{{}_3} \right] - \left[3 \times 2 - \frac{{}^3_3}{{}_3} \right] =$$

$$3 = 0 - [6 - 9] =$$

• بعض خواص التكامل المحدد :

(١) إذا كانت قيمة ه نقطة بين أ ، ب فإن :

$${}^3_3 \text{ د س} = {}^3_3 \text{ د س} + {}^3_3 \text{ د س}$$

فمثلاً :

$${}^3_3 \text{ د س} = {}^3_3 \text{ د س} + {}^3_3 \text{ د س}$$

$$(٢) \quad \text{ب} \text{ د (س) د س} = - \text{ب} \text{ د (س) د س}$$

لأن:

$$\text{ب} \text{ د (س) د س} = \text{ر (ب) - ر (أ)}$$

$$= - [\text{ر (أ) - ر (ب)}]$$

$$= - \text{ب} \text{ د (س) د س}$$

(٣) إذا كانت س = ت (ع) فإن د س = ت' (ع) د عليه فإن :

$$\text{ب} \text{ د (س) د س} = \text{ب} \text{ د (ت (ع) ت' (ع) د ع}$$

حيث أ = ت (ق) وب = ت (ك) أي عند استخدام طريقة التكامل بالتعويض وتغيير المتغير يتغير حدا التكامل تبعاً للمتغير الجديد.

(٤) إذا كانت ص = د (س) داله زوجية ، أي تحقق د (س) = د (س -) فإن :

$$- \text{ب} \text{ د (س) د س} = \text{ب} \text{ د (س) د س}$$

ومن أمثلة الدوال الزوجية :

$$د(س) = أس^2 ، هـ(س) = ب س^4 ، .. ر(س) = جتاس$$

$$(٥) إذا كانت ص = د (س) داله فردية ، أى تحقق

$$د (-س) = - د (س)$$

 فإن :$$

$$٠ = د (س) د س$$

ومن أمثلة الدوال الفردية :

$$د(س) = أس^3 ، حيث ن = ١ ، ٣ ، ٥ ، ...$$

$$هـ(س) = جاس ر(س) = ظاس$$

تحقق من ذلك في الحالتين التاليتين :

$$(أ) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس د س$$

$$(ب) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} س^3 د س$$

الحل :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس د س = [جاس]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = (جا - \frac{\pi}{2}) - (جا - \frac{\pi}{2}) = ٠ = (١ - ١)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \cos x \, dx = 2 [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 & = 2 \left[\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right] = 2 [0 - 1] = -2 \\
 & \text{(ب) } \int_{-1}^1 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0
 \end{aligned}$$

تمرین (۵-۱)

جد قیمة ما یأتی :-

$$\begin{aligned}
 (۱) \quad & \int_{-2}^2 x^2 \, dx \\
 (۲) \quad & \int_{-2}^2 x^3 \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (۳) \quad & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx \\
 (۴) \quad & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (۵) \quad & \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 3} \, dx \\
 (۶) \quad & \int_1^9 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} \, dx
 \end{aligned}$$

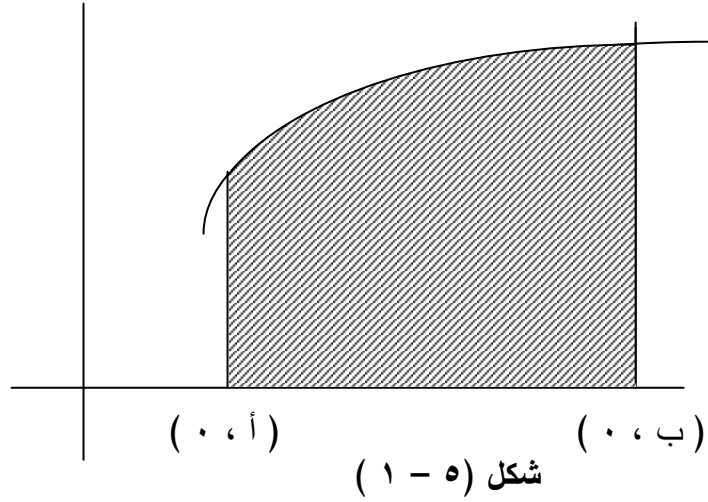
$$\begin{aligned}
(7) \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{s^2 \cos^2 \theta + 1} \, d\theta \\
(8) \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{s^2 \cos^2 \theta + 1} \, d\theta \\
(9) \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{s^2 \cos^2 \theta + 1} \, d\theta \\
(10) \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{s^2 \cos^2 \theta + 1} \, d\theta \\
(11) \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{s^2 \cos^2 \theta + 1} \, d\theta \\
(12) \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{s^2 \cos^2 \theta + 1} \, d\theta
\end{aligned}$$

جد قيمة الثابت جـ

(٥ - ٢) المساحات :

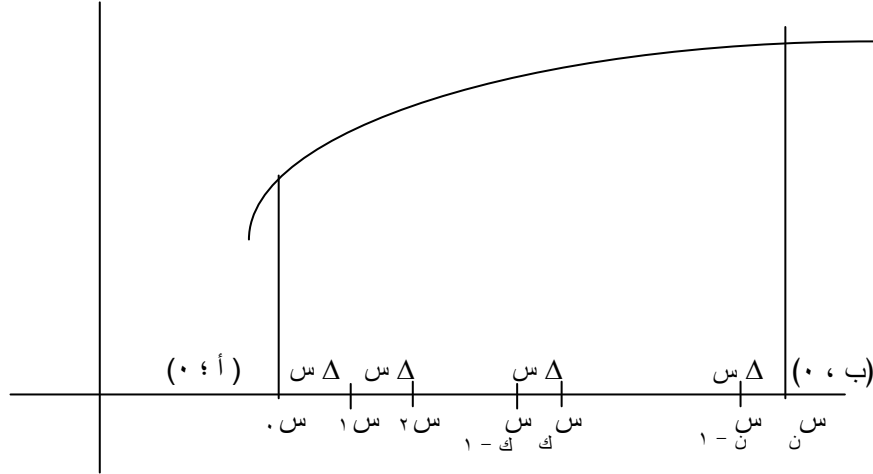
معروف أن الأشكال الهندسية المنتظمة يمكن إيجاد مساحتها . ولكن تكمن الصعوبة في إيجاد مساحات لأشكال غير الأشكال الهندسية المتعارف عليها .

وسنتناول بالشرح في هذه الفقرة كيفية إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى دالة ما ومحور السينات باستخدام مفهوم التكامل المحدد .
جد المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور السيني من $s = 0$ إلى $s = 1$ في الشكل (٥ - ١)



هذه المساحة لا يمكن إيجادها بالطرق المعروفة ؛ لأن أحد أضلاع الشكل (٥ - ١) ليس منتظماً وإنما هو شكل منحنى عام . لذلك نتبع الخطوات التالية لإيجاد المساحة :

- (١) أفرض أن $v = d(s)$ دالة معرفة في الفترة $[أ، ب]$.
- (٢) قسم الفترة $[أ، ب]$ إلى n فترة جزئية متساوية بواسطة النقاط $s_٠، s_١، s_٢، \dots، s_k، \dots، s_n - ١، s_n$ بحيث يكون $s_١ - s_٠ = s_٢ - s_١ = \dots = s_n - s_{n-١} = \Delta s$ كما في الشكل (٥ - ٢) .



الشكل (٥ - ٢)

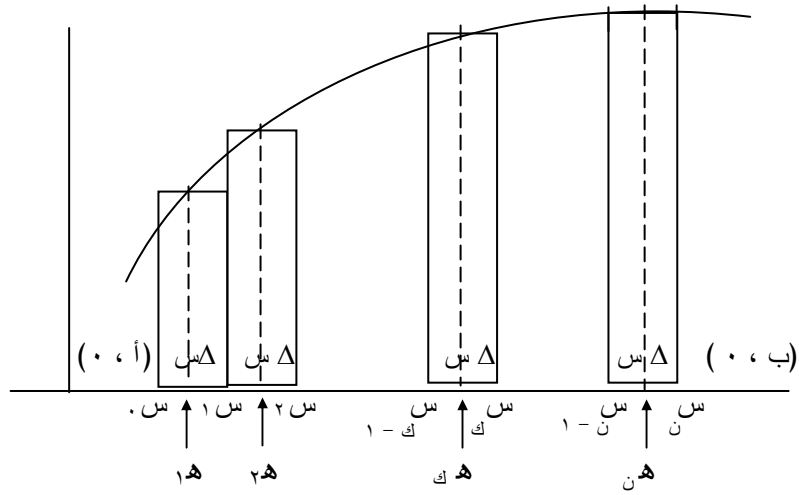
من الشكل (٥ - ٢) :

$$s_n = a, \quad s_n = b$$

$$s_k = a + \Delta s$$

$$\Delta s = \frac{s_n - a}{n} = \frac{b - a}{n}$$

(٣) أفرض $s_1, s_2, \dots, s_n$ نقاط داخل الفترة $[a, b]$ بحيث تقع في $[s_1, s_2]$ تقع في $[s_2, s_3]$ وهكذا كما في الشكل (٥ - ٣)



الشكل (٥ - ٣)

∴ ص = د (س) فإن القيمة العددية لأطوال الأشكال (المستطيلة) ،
الشكل (٥ - ٣) هي د (١ هـ) ، د (٢ هـ) ، ... د (٣ هـ) ، ... د (٤ هـ) ، ... د (٥ هـ)
على التوالي .

أما عرض هذه الاشكال فهو Δ س

∴ مساحة الشكل الأول = د (١ هـ) × Δ س

مساحة الشكل الثاني = د (٢ هـ) × Δ س

وهكذا

فإذا أردنا إيجاد المساحة الكلية بين المنحنى ومحور السينات في الفترة
[أ ، ب] فإننا نقوم بجمع مساحة كل الأشكال السابقة . فإذا افترضنا أن جن
تمثل المساحة الكلية فإن :

$$\text{جن} = د (١ هـ) \Delta س + د (٢ هـ) \Delta س + \dots + د (٥ هـ) \Delta س + \dots (١)$$

لاحظ أنه كلما اقتربت Δ س من الصفر اقتربت مساحة المستطيلات
من المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ص = د (س) والمحور السيني من
س = أ إلى س = ب .

على ضوء ذلك فإن جن تمثل محصلة مساحة المستطيلات المتاحة على الفترات [س. ، س_١] ، [س_١ ، س_٢] ، [س_٢ - س_١ ، س_٣] والتي تمثل د (هـ) ، د (هـ) ، ، د (هن) اطوالها وتمثل Δ س عرضها .

الآن عندما تؤول ن إلى ما لا نهاية فإن :

$$\Delta س = \frac{أ - ب}{ن} \text{ تؤول إلى الصفر ، وبالتالي فإن :}$$

نها جن = ج تمثل المساحة المحصلة المحصورة بين منحنى الداله

ص = د (س) وبين المحور السيني من س = أ إلى س = ب .
الآن ما علاقة ذلك بتكامل الداله ص = د (س) ؟ إذا كانت هنالك علاقة بين هذه المساحة وتكامل د (س) فهل هذا سيعنى أن التكامل سيكون وسيلة سهلة لايجاد مساحات لاشكال غير الأشكال الهندسية المتعارف عليها؟ هذا ما سيتضح من النظرية الأساسية للتكامل :

النظرية الأساسية للتكامل :

تقول النظرية الأساسية للتكامل إذا كانت :

$$ر (س) = د (س) د س$$

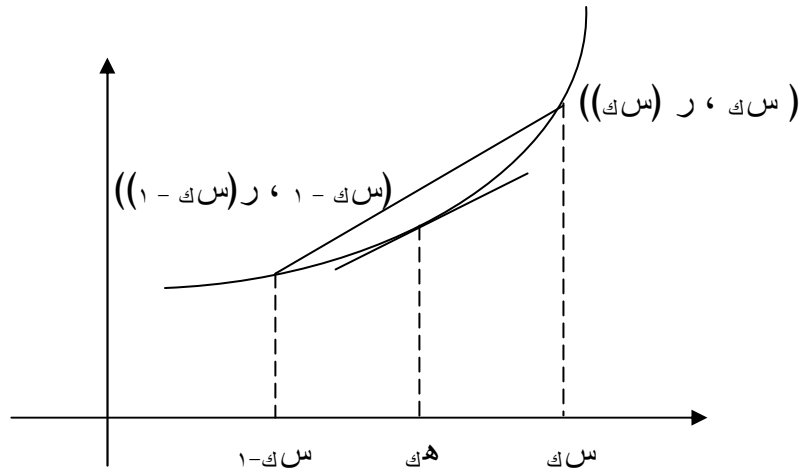
فإن :

$$ج = نها جن = ر (ب) - ر (أ) \text{ _____ (٢)}$$

حيث جن معرفه في المعادلة (١) .
إثبات هذه النظرية بصورة عامة خارج نطاق هذا المقرر، ولكن دعنا للتأكد من صحتها في الحالة الخاصة التالية :
لنناقش الداله ر (س) في الفترة (س_ك - س_١ ، س_ك) ولتكن هـ هي النقطة التي تحقق المعادلة .

$$r(s_k) - r(s_{k-1}) = \Delta s \cdot d(s_k) \quad (3)$$

المعنى الهندسى لذلك هو أن ميل المماس لمنحنى الدالة $r = r(s)$ عند s_k يساوى ميل الوتر الواصل بين $(s_k, r(s_k))$ و $(s_{k-1}, r(s_{k-1}))$ (انظر الشكل (٥ - ٤)) وذلك $r'(s) = d(s)$.



الشكل (٥ - ٤)

من (٣) :

$$d(s_k) \Delta s = r(s_k) - r(s_{k-1})$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n [r(s_k) - r(s_{k-1})] = \sum_{k=1}^n d(s_k) \Delta s = r(s_n) - r(s_0)$$

$$[r(s_1) - r(s_0)] + [r(s_2) - r(s_1)] + \dots + [r(s_n) - r(s_{n-1})] - [r(s_n) - r(s_0)]$$

وبعد فك الاقواس :

$$= r(s_1) + r(s_2) + \dots + r(s_n) - r(s_0) - r(s_n) + r(s_0)$$

$$\therefore r(s_1) + r(s_2) + \dots + r(s_n) - r(s_n) = r(s_0)$$

إذن : $r(s_1) + r(s_2) + \dots + r(s_n) - r(s_n) = r(s_0)$
عليه فإن :

$$r(s_1) + r(s_2) + \dots + r(s_n) - r(s_n) = r(s_0)$$

الخلاصة :

إذا اردنا ايجاد محصلة المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $v = d(s)$ ومحور السينات بين $s = a$ و $s = b$ ، نتحصل أولاً على تكامل $d(s)$ ، أى .

$$[d(s) = ds]$$

ثم تكون محصلة المساحة :

$$r(b) - r(a) . \text{ ونعبر عن ذلك بـ :}$$

$$[d(s) = ds = r(b) - r(a)]$$

حيث $r'(s) = d(s)$.

وهذا هو التكامل المحدد الذى سبق لك التعرف عليه .

تجدر الإشارة هنا إلى أنه من تعريف المجموع $\sum$ فإن $\sum$ تكون سالبة إذا كانت $d(s)$ سالبة في الفترة $[a, b]$ وتكون موجبة إذا كانت $d(s)$ موجبة في الفترة $[a, b]$. أما إذا كانت $d(s)$ سالبة في جزء من $[a, b]$ وموجبة في الجزء الآخر فإننا إما نحصل على قيمة سالبة لـ $\sum$

وإما موجبة . لذلك فإن التكامل المحدد يعطى محصلة المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = d(x)$ ومحور السينات من $x = a$ إلى $x = b$.
مثال (١) :

جد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2 + 3$ ومحور السينات من $x = 2$ إلى $x = 3$
الحل :

الدالة $y = x^2 + 3$ موجبة بين $x = 2$ و $x = 3$ إذن المساحة المطلوبة تعطى بالتكامل المحدد .

$$\int_2^3 \left[x^2 + 3 \right] dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x \right) \Big|_2^3$$

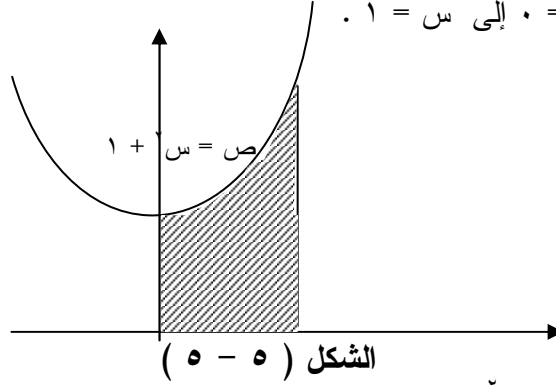
$$= \left[\frac{3^3}{3} + 3 \times 3 \right] - \left[\frac{2^3}{3} + 3 \times 2 \right] =$$

$$= \left[9 + 9 \right] - \left[\frac{8}{3} + 6 \right] =$$

$$= 9 - \frac{1}{3} = 8 \frac{2}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٢) :

احسب المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $v = s + s^2$ ومحور السينات من $s = 0$ إلى $s = 1$.
الحل :



الشكل (٥ - ٥)
الدالة $v = s + s^2$ دوماً موجبة بين $s = 0$ و $s = 1$ إذا المساحة المطلوبة تعطى بالتكامل المحدد .

$$\int_0^1 (s + s^2) ds$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} \right]_0^1$$

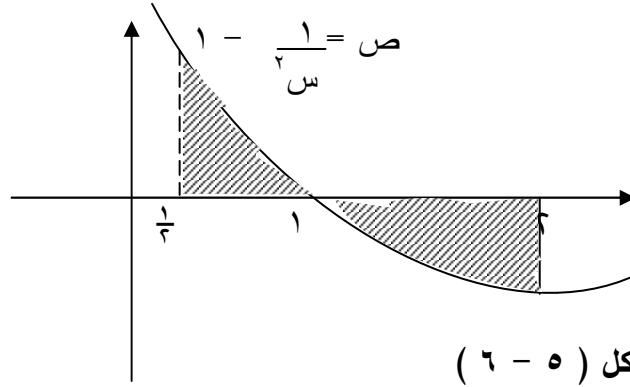
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(0 + 0 \right) = \frac{5}{6}$$

مثال (٣) :

احسب المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $d(s) = 1 - \frac{1}{s}$ ومحور السينات من $s = \frac{1}{2}$ إلى $s = 2$.
الحل :

في الفترة $[\frac{1}{2}, 2]$ فإن الدالة تساوى صفر عند $s = 1$ ، أى أن $d(1) = 0$ وأن الدالة موجبه في $[\frac{1}{2}, 1]$ وسالبة في $[1, 2]$ ، أنظر

الشكل (٥ - ٦) .



فالمساحة المطلوبة إذا هي مجموع المساحتين المظللتين ، وهي :

$$\left| \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(1 - \frac{1}{2s} \right) ds \right| + \int_{\frac{1}{4}}^2 \left(1 - \frac{1}{2s} \right) ds$$

$$= \left| \frac{1}{2} \left[s - \frac{1}{s} \right] \right|_{\frac{1}{4}}^1 + \left[\frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) \right]_{\frac{1}{4}}^2 =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right| + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \text{ وحدة مربعة}$$

لاحظ أنه إذا أجرينا التكامل المحدد مباشرة فإننا نحصل على :

$$\left[\left(1 - \frac{1}{s} \right) \right]_{\frac{1}{3}}^2 = \left[s - \frac{1}{s} \right]_{\frac{1}{3}}^2$$

$$= \left[2 - \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{1}{\frac{1}{3}} - 2 \right] =$$

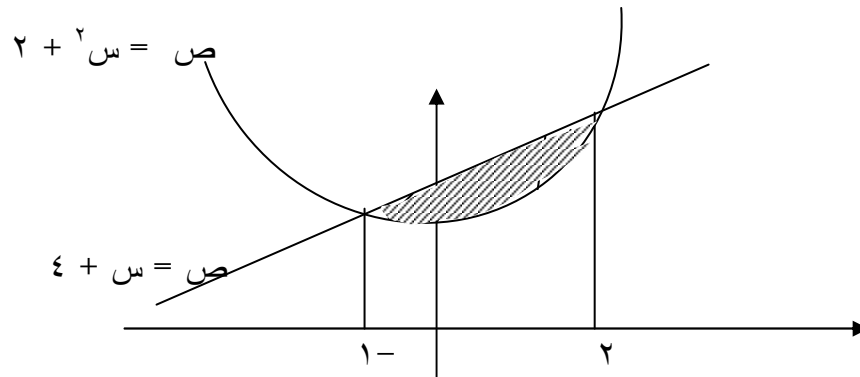
وذلك لانها محصلة لقيمتين متساويتين ومختلفتين في الاشارة بينما المساحة المطلوبة هي المجموع الجبرى لمساحتين موجبتين .

مثال (٤) :

احسب المساحة المحصورة بين المنحنيين $s = 2 + s^2$ ، $s = s + 4$.

الحل :

نرسم الشكل العام للمنحنيين لنعرف المساحة المطلوبه وهى المظلة في الشكل (٥ - ٧) .



الشكل (٥ - ٧)

لتكن M_1 هي المساحة المحصورة بين $s = 4$ ومحور السينات من $s = 1$ إلى $s = 2$ [عند $s = 1$ ، 2 يتقاطع المنحنيان] و M_2 هي المساحة المحصورة بين $s = 2 + s^2$ ومحور السينات من $s = 1$ إلى $s = 2$. إذن المساحة بين المنحنيين $M_2 - M_1$.

$$= \int_{1-}^2 (s + 4) ds - \int_{1-}^2 (s^2 + 2) ds$$

$$= \int_{1-}^2 (s - s^2 + 2) ds \dots \text{لماذا؟}$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} + 2s \right]_{1-}^2 = \left(2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) =$$

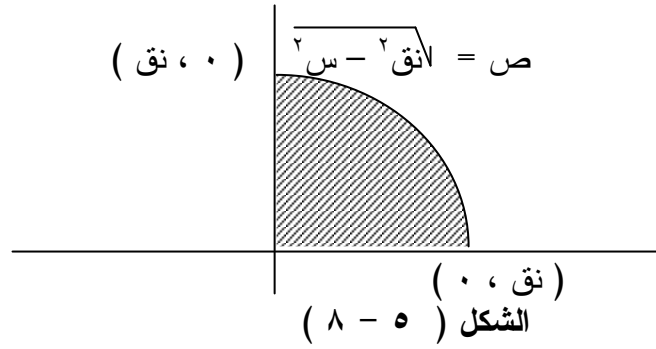
$$= \frac{10}{3} - \left(\frac{7}{6} - \right) = \frac{9}{2} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٥) :

اثبت أن مساحة الدائرة التي نصف قطرها π تساوى π .

الحل :

في الشكل (٥ - ٨) الجزء المظلل يمثل ربع مساحة الدائرة التي نصف قطرها π .



وهو عبارة عن المساحة المحصورة بين منحنى الداله
 $\sqrt{نق^2 - س^2} = ص$ ومحور السينات من $س = ٠$ إلى $س = نق$ ، أى أن
 ربع مساحة الدائرة تساوى :

$$\frac{نق}{٢} \sqrt{نق^2 - س^2} دس$$

$$ضع س = نق جتا ع$$

$$\therefore ص = نق جا ع$$

$$دس = نق جا ع د ع \quad \frac{\pi}{٢} = ع ، ٠ = ع$$

$$عند س = نق ، ع = ٠$$

$$\therefore \frac{نق}{٢} \sqrt{نق^2 - س^2} دس = نق \sqrt{نق^2 - نق^2 جتا^٢ ع} جا ع د ع$$

$$= نق \int_0^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١ - جتا^٢ ع} جا ع د ع$$

$$= \text{نق}^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{جا}^2 \text{ع دع}$$

$$= \frac{1}{2} \text{نق}^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \text{جتا}^2 \text{ع}) \text{دع}$$

$$= \frac{1}{2} \text{نق}^2 [\text{ع} - \frac{1}{2} \text{جا}^2 \text{ع}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2} \text{نق}^2 [\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{نق}^2] = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \frac{\pi}{4} \times \text{نق}^2 = \pi$$

تمرين (٥ - ٢)

(١) احسب المساحات المبينة في الآتي :

أ/ بين ص = س^٢ + س^٣ + ٢ ، ومحور السينات من س = ١ إلى س = ٤
 ب/ ص = س^٢ - ٧ س + ٦ ، والمحور السيني .
 ج/ بين ص = (س - ١) - ٢٥ ، والمحور السيني .

(د) بين ص = ١٣ - ٢ س و ص = ٢ س + $\frac{9}{س}$ الواقعة في الربع الأول .

(٢) ارسم المنحنى ص = س^٢ - ٣ س^٢ - ٦ س + ٨ واحسب المساحة المحصورة بينه وبين المحور السيني .

(٣) المنحنى ص = أ (س - ب) (س - ج) (س - د) يمر بالنقاط (٠، ١)، (٠، ٢)، (٠، ٤)، (٠، ٥) . جد معادلته والمساحة المحصورة بينه وبين المحور السيني .

(٤) إذا كان ميل المماس عند أى نقطة لمنحنى ما يساوى $3 - 2s$ و $3 + s$ ويمر المنحنى بالنقطة $(0, 2)$ فاحسب المساحة بين المنحنى ، المحور السينى بين $s = 2$ ، $s = 4$.

(٥) منحنى يمر بالنقطة $(1, 3)$ فإذا كان ميل المماس عند أى نقطة عليه يساوى $s^2 - 4s + 3$ فاحسب المساحة المحصورة بينه وبين المحور السينى وقيم s عند نهايتيه الصغرى والعظمى .

(٦) إذا كان ص " عند أى نقطة على منحنى ما تساوى مقداراً ثابتاً وكان المنحنى يمر بالنقطتين أ $(1, 2)$ ، ب $(-3, 0)$ ، وميل المماس

عند النقطة أ يساوى $-\frac{1}{4}$. فجد معادلة المنحنى والمساحة المحصورة

بينه وبين ص $= 2s$.

(٧) جد قيمة كل من التكاملات المحددة الآتية :

$$(أ) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$(ب) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$(ج) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x} \, dx$$

الوحدة السادسة



الدائرة

هـاف الوءءة الساءسة

بعء ءراسة هءة الوءءة ٱتوقع من الطالب أن ٱكون قاءراً على أن :-

- ١- ٱتعرف معاءلة الءائرة.
- ٢- ٱتعرف الصورة العامة لمعاءلة الءائرة .
- ٣- ٱيجاد مركز ونصف قطر الءائرة إذا علمت معاءلتها .
- ٤- ٱيجاد معاءلة الءائرة الءى ءحقق شروط معينة مثل الءائرة الءى تمر بءلالء نقاط .
- ٥- ٱيجاد معاءلة الءائرة إذا علم نهاىءا قطر فىها
- ٦- ٱيجاد معاءلة الءائرة الءى تمر بنقطءىن ومركزها ٱقع على مسءقىم معلوم .
- ٧- معاءلة المماس للءائرة من نقطة علفها .
- ٨- ٱيجاد طول المماس المرسوم لءائرة من نقطة ءارجها .

(٦) الدائرة

(٦ - ١) معادلة الدائرة :

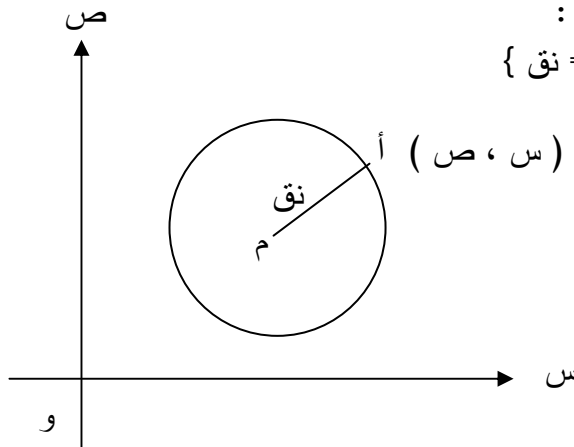
عرفنا سابقاً أن مجموعات من نقط المستوى الإحداثي تكون بشروط معينة اشكالا هندسية مثل المستقيم ، القطعة المستقيمة ، المنحنى ، ووجدنا معادلة المستقيم وهي العلاقة التي تربط إحداثي أى نقطة (س ، ص) عليه . والصورة العامة لمعادلة المستقيم هي :

$$أ س + ب ص + ج = ٠ \quad (أ ، ب ، ج \in \mathbb{R}) .$$

والآن سندرس مجموعة جزئية أخرى من المستوى لها صفة مميزة تشكل هندسياً ما يعرف بالدائرة ونعلم أن تعريف الدائرة :
هي مجموعة كل النقط في المستوى التي تبعد بعداً متساوياً عن نقطة معلومة .

يسمى هذا البعد نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز (نق) . وتسمى النقطة المعلومة (مركز الدائرة) .

فإذا رمزنا لمجموعة نقط الدائرة بالرمز ن ولمركزها بالرمز م ،
(س ، ص) أى نقطة على الدائرة [الشكل (٦ - ١)] .
نجد أن الصفة المميزة لها هي :
$$ن = \{ (س ، ص) : \overline{أ م} = \overline{نق} \}$$



الشكل (٦ - ١)

فإذا كان مركز الدائرة م هي النقطة (د ، هـ) والنقطة
أ (س ، ص) أى نقطة تقع على الدائرة التى نصف قطرها = نق .
∴ $\overline{أم} = \text{نق}$

$$\overline{أم} = \sqrt{(س - د)^2 + (ص - هـ)^2} = \text{نق}$$

وبتربيع الطرفين

$$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = \text{نق}^2$$

وتكون الصفة المميزة للدائرة ن :

$$ن = \{ أ (س ، ص) : (س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = \text{نق}^2 \}$$

وعليه فإن معادلة الدائرة التى مركزها (د ، هـ)
وطول نصف قطرها نق هي :
 $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = \text{نق}^2$
حيث (س ، ص) أى نقطة على الدائرة .

فإذا كان مركز الدائرة عند نقطة الأصل (٠ ، ٠) تصبح معادلتها في
الصورة :

$$(س - ٠)^2 + (ص - ٠)^2 = \text{نق}^2$$

أى $\text{نق}^2 = ص^2 + س^2$

مثال (١) :

جد معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٣ .

الحل :

بالتعويض عن نق = ٣ تكون معادلة الدائرة هي :
 $٩ = ص^2 + س^2$

مثال (٢) :

جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، - ٣) ، ونصف قطرها ٤ وحدات .

الحل :

∴ $(س - د)^2 + (ص - ه)^2 = نق^2$
وبالتعويض عن (د ، ه) بالنقطة (٢ ، - ٣) ، نق = ٤ فإن معادلة الدائرة المطلوبة هي :

$$(س - ٢)^2 + (ص - (-٣))^2 = ٤^2$$
$$\text{أو } (س - ٢)^2 + (ص + ٣)^2 = ١٦$$

مثال (٣) :

جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها :
 $٢٥ = (س + ١)^2 + ص^2$

الحل :

بوضع المعادلة على الصورة : $(س - د)^2 + (ص - ه)^2 = نق^2$
تصبح : $(س - (-١))^2 + (ص - ٠)^2 = ٥^2$
∴ المركز (-١ ، ٠) ، نق = ٥

تمرين (٦ - ١)

- (١) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٦ وحدات .
- (٢) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (٠ ، - ٣) وطول نصف قطرها ٧ وحدات .

(٣) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-٥, ٢)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{١٧}$ وحدة .

(٤) جد مركز وطول نصف قطر الدائرة في كل من الحالات التالية :

$$(أ) \quad ٤ = ٢(١ - ص) + ٢س$$

$$(ب) \quad ١ = ٢ص + ٢(٤ + س)$$

$$(ج) \quad ٦٤ = ٢(٥ - ص) + ٢(٣ + س)$$

(٥) جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-٢, -٧)$ وتمر بالنقطة $(٢, -٤)$.

(٦) جد معادلة الدائرة التي $\overline{أب}$ قطر فيها حيث $أ(٧, ١٢)$ ، $ب(-٥, -٤)$.

(٦ - ٢) الصورة العامة لمعادلة الدائرة :

فيما سبق وجدنا أن معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $م(د, هـ)$ ونصف قطرها $نق$ هي :

$$(١) \quad (س - د) + (ص - هـ) = ٢نق$$

وبإزالة الأقواس تصبح المعادلة (١) :

$$٢س - ٢د + ٢ص - ٢هـ = ٢نق$$

وبوضع $د = -ل$ ، $هـ = -ك$

$$\therefore ٢س + ٢ل + ٢ص + ٢ك - ٢نق = ٠$$

أى :

$$٢س + ٢ل + ٢ص + ٢ك - ٢نق = ٠$$

وبوضع $ل = ٢ك - ٢نق$ = ج

تصبح المعادلة على الصورة :

$$(٢) \quad ٢س + ٢ص + ٢ك - ٢نق = ٠$$

وحيث أن $ل = ٢ك - ٢نق$ = ج

$$\Leftarrow ٢ل + ٢ك - ٢نق = ج$$

$$\therefore ٢ل + ٢ك - ٢نق = ج$$

بشرط أن $٢ل + ٢ك - ٢نق > ٠$

والمعادلة (٢) تسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة وبذلك تكون :

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

$$س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + ج = ٠$$

حيث ل ، ك ، ج ثوابت بشرط أن :

$$ل^٢ + ك^٢ - ج < ٠$$

مركزها (- ل ، - ك) ، نصف قطرها

$$نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ج}$$

نلاحظ في الصورة العامة لمعادلة الدائرة ما يلي :

(١) معامل س = معامل ص .

(٢) خالية من الحد المشترك على س ص .

(٣) إذا كان $ل^٢ + ك^٢ - ج = ٠$ فالمعادلة تمثل نقطة وحيدة أما إذا كان

$ل^٢ + ك^٢ - ج > ٠$ فالمعادلة لا تمثل دائرة ومجموعة حلها $\emptyset$

مثال (١) :

تحقق أن المعادلة :

$$س^٢ + ص^٢ + ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$$

تمثل دائرة وعين مركزها وطول نصف قطرها .

الحل :

بمقارنة المعادلة : $س^٢ + ص^٢ + ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$

بالصورة العامة : $س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + ج = ٠$

$$نجد أن : ٢ل = ٤ \Rightarrow ل = ٢$$

$$٢ك = ٦ \Rightarrow ك = ٣$$

$$ج = -١٢$$

$$ل^٢ + ك^٢ - ج = ٢٥ > ٠$$

∴ المعادلة تمثل دائرة .

مركزها (- ل ، - ك) = (- ٣ ، - ٢)

$$\text{نق} = \sqrt{(-٣)^2 + (-٢)^2} = \sqrt{١٣} = ٣.٦٠٦ \text{ وحدات}$$

مثال (٢) :

جد المركز ونصف القطر للدائرة التي معادلتها :

$$٠ = ٩ + ٢٤ ص + ٤ س + ٤ ص^٢ + ٤ س^٢$$

الحل :

نقسم أولاً على ٤ لجعل معامل س = معامل ص = ١

$$٠ = \frac{٩}{٤} + ٦ ص + س + ص^٢ + س^٢$$

$$\therefore ١ = ل^٢ \Leftrightarrow ل = \frac{١}{٢}$$

$$٢ = ك \Leftrightarrow ك = ٣$$

∴ المركز = (- ٣ ، - \frac{١}{٢})

$$\text{نق} = \sqrt{\left(-٣ - \frac{١}{٢}\right)^2 + \left(-٣\right)^2} = \sqrt{\frac{٩}{٤} - ٩ + ١} = \sqrt{\frac{١٠}{٤}} = \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$$

$$\sqrt{١٠} = \frac{\sqrt{١٠}}{٢} = \sqrt{\frac{١٠}{٤}} = \sqrt{\frac{١٠}{٤}} = \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$$

تمرين (٦ - ٢)

(١) جد المركز ونصف القطر لكل من الدوائر التالية :

(أ) $s^2 + s^2 - 2s - 6 - ص = ٢٦ - ٠$

(ب) $s^2 + s^2 - 4s - 4 - ص = ٨ + ٠$

(ج) $s^2 + s^2 - ١٠ص = ٠$

(د) $s^2 + s^2 - ٢س - ٢س + ١ص = ٠$

(هـ) $s^2 + ٩س + ٩ص + ٢٤ص - ٣٨ = ٠$

(و) $s^2 + ٢س + ٥ = ص (٤ - ص)$

(ز) $ص (١ - ص) = s^2$

(٢) جد نصف قطر الدائرة :

$s^2 + s^2 + ٨س - ١٠ص = ٢١ + ٠$

وجد بعد مركزها عن المستقيم $s - ٢ص + ٤ = ٠$

(٣) جد قيمة $ك$ التي تجعل طول نصف قطر الدائرة ٦ وحدات .

ن : $s^2 + s^2 - ٦س + ٢ك - ٢٣ = ٠$

(٤) دائرة معادلتها $s^2 + s^2 + ٢س + ٢س + ٢ص - ١٧ = ٠$

جد قيمة $أ$ بحيث يكون طول نصف قطرها ٥ وحدات ثم عين مركزها.

(٦ - ٣) الدائرة التي تحقق شروطاً معينة :

عرفنا أن الدائرة يمكن أن تتعين إذا علمنا مركزها ونصف قطرها

بالمعادلة :

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

وهي معادلة تشتمل على ثلاثة ثوابت $د$ ، $هـ$ ، $نق$. وإذا تأملنا معادلة

الدائرة في الصورة العامة .

$s^2 + s^2 + ٢ل + ٢ك - ص + ج = ٠$

نجد أنها تشتمل على ثلاثة ثوابت أيضاً $ل$ ، $ك$ ، $ج$. لذلك تتعين معادلة الدائرة

بأى من الصورتين إذا عرفنا الثوابت الثلاثة . ويجب لمعرفتها وجود ثلاث

معادلات جبرية مستقلة فيما بينها . أى ثلاثة شروط هندسية مستقلة . لذلك نتعين الدائرة إذا حققت ثلاثة شروط هندسية مستقلة .

(أ) معادلة الدائرة التى تمر بثلاث نقاط :

إذا علمنا إحداثيات ثلاث نقاط تقع على الدائرة وأردنا إيجاد معادلتها يمكن التوصل إلى المعادلة باحدى هذه الطرق .

أولاً : نضع الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$$x^2 + y^2 + 2lx + 2my + c = 0$$

وبما أن الدائرة تمر بالنقاط الثلاث ، فكل نقطة منها تحقق هذه المعادلة.

فبالتعويض نحصل على ثلاث معادلات في المجاهيل l ، m ، c .

وبحل المعادلات أنياً نحصل على قيم هذه الثوابت .

ثانياً : الطريقة الثانية :

نعلم أن مركز الدائرة هو نقطة تقاطع المنصفين العموديين لوترين في الدائرة غير متوازيين .

إذن نوجد معادلة المنصف العمودى للوتر الواصل بين النقطتين الأولى والثانية .

وبالمثل نوجد معادلة المنصف العمودى للوتر الواصل بين النقطتين الثانية والثالثة مثلاً .

وبذلك يكون مركز الدائرة هو نقطة تقاطع المنصفين ونصف قطرها هو بعد مركزها عن أى من النقاط المعلومة .

ثالثاً : طريقة أخرى لتعيين معادلة الدائرة المارة بثلاثة نقاط ، ولتكن النقاط

الثلاث هي أ (x_1 ، y_1) ، ب (x_2 ، y_2) ، ج (x_3 ، y_3) .

وان معادلة المستقيم أ ب هي : $m x + n y + w = 0$

$$(1) \quad \begin{cases} m x_1 + n y_1 + w = 0 \\ m x_2 + n y_2 + w = 0 \end{cases}$$

فإذا اعتبرنا المعادلة :

$$(x_1 - x_2)(y - y_1) + (x_2 - x_3)(y_2 - y) + (x_3 - x_1)(y - y_2) = 0 \quad (2)$$

حيث y مقدار ثابت سيعين فيما بعد ، فإن هذه المعادلة تمثل دائرة ، لأنها من الدرجة الثانية فيها معامل s^2 ، s متساويان وخالية من الحد المشترك على s . وتمر بكل من النقطتين (s_1, y_1) ، (s_2, y_2) لأن كلا من النقطتين تحققها .

فإذا مرت الدائرة الممثلة بالمعادلة (٢) بالنقطة (s_3, y_3) كذلك فإن :
 $(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_3) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)(y_3 - y_3) = 0$.
 ومن هذه المعادلة يمكن حساب قيمة y .
 لاحظ أن الطريقة الأخيرة هي أقصر الطرق وأسهلها .

مثال (١) : جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط :
 أ $(-2, 5)$ ، ب $(4, 9)$ ، ج $(2, -1)$

الحل :
 معادلة المستقيم أ ب هي : $\frac{y - 5}{-2 - 5} = \frac{x - 4}{4 - 9}$

$$\Leftrightarrow 2s - 3y + 19 = 0$$

∴ معادلة الدائرة يمكن كتابتها على الصورة :

$$(s + 2)(s - 4) + (y - 5)(y - 9) + (2s - 3y + 19)^2 = 0$$

وحيث أنها تمر بالنقطة ج

$$\therefore (2 + 2)(2 - 4) + (2 - 5)(2 - 9) + (2 \times 2 - 3 \times 2 + 19)^2 = 0$$

$$\therefore -8 + 10 + 260 = 0$$

$$\therefore y = -2$$

∴ معادلة الدائرة هي :

$$(s + 2)(s - 4) + (y - 5)(y - 9) + (2s - 3y + 19)^2 = 0$$

$$\text{أي } s^2 + y^2 - 8s - 8y + 1 = 0$$

مثال (٢) :

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط :
 $(-1, 4)$ ، $(-2, 1)$ ، $(6, 5)$

الحل :

باستخدام الطريقة الأولى ، نفرض أن المعادلة هي :

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + c = 0$$

النقطة $(-1, 4)$ تقع على الدائرة

$$1 + 16 + 2(-1) + 2(4) + c = 0 \Rightarrow c = -17$$

$$(1) \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 17 = 0$$

وبالمثل من النقطتين $(-2, 1)$ ، $(6, 5)$ نحصل على المعادلتين :

$$(2) \quad 4 + 1 + 2(-2) + 2(1) + c = 0 \Rightarrow c = -5$$

$$(3) \quad 36 + 25 + 2(6) + 2(5) + c = 0 \Rightarrow c = -61$$

وبحل المعادلات (1) ، (2) ، (3) آنياً نحصل على :

$$x = -2, y = 1, c = -5$$

∴ المعادلة المطلوبة :

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$$

(ب) معادلة الدائرة إذا علم نهايتا قطر فيها :

إذا فرضنا أن نهايتي أحد اقطار الدائرة هما النقطتان أ $(1, 1)$ ،

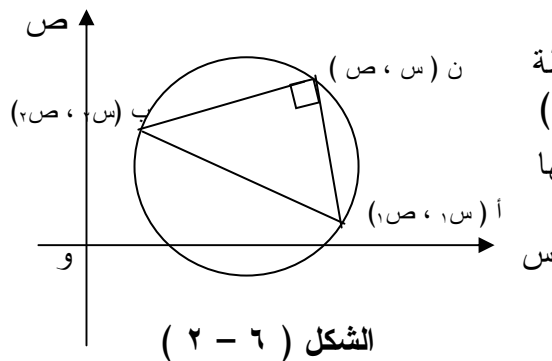
ب $(2, 2)$.

وأن ن (x, y) أي نقطة

على الدائرة . الشكل (٦-٢)

نجد أن $\angle ANB = 90^\circ$ لأنها

مرسومة على نصف دائرة .



الشكل (٦-٢)

فإذا كان م_١ ، م_٢ ميلى $\overline{أ ن}$ ، $\overline{ب ن}$ على الترتيب فإن م_١ م_٢ = ١ -
أى أن :

$$١ - = \frac{ص - ص_٢}{س - س_٢} \times \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$$

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هي :

$$٠ = (س - س_١)(س - س_٢) + (ص - ص_١)(ص - ص_٢)$$

مثال (٣) :

جد معادلة الدائرة التى نهايتا قطر فيها النقطتان :

$$(٢ ، ٣-) ، (٤ ، ٥-)$$

الحل :

$$٠ = (س - س_١)(س - س_٢) + (ص - ص_١)(ص - ص_٢)$$

$$٠ = (س - ٣-)(س - ٤) + (ص - ٥-)(ص - ٢)$$

$$٠ = (س + ٣)(س - ٤) + (ص + ٥)(ص - ٢)$$

$$٠ = س^٢ + ص^٢ - ٣س + ٥ص - ٢٢$$

(ج) معادلة الدائرة المارة بنقطتين ومركزها يقع على مستقيم معلوم :

في هذه الحالة يتم التوصل إلى قيم الثوابت ل ، ك ، ج بحل المعادلات الثلاث . اثنان يتم التوصل اليهما بتعويض النقطتين في معادلة الدائرة المفروضة ، والثالثة بتعويض احداثيات المركز المفروض (ل ، ك) في معادلة المستقيم ، أو بطريقة أخرى بايجاد معادلة المنصف العمودى للوتر الواصل بين النقطتين وحلها أنياً مع معادلة المستقيم المعلوم لأن نقطة تقاطعهما تمثل مركز الدائرة ثم يكمل الحل .

مثال (٤) :

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $(-2, 4)$ ، $(6, 8)$ ويقع مركزها على المستقيم $s - v + 1 = 0$

الحل :

من المعادلة العامة للدائرة :

$$s^2 + v^2 + 2ls + 2kv + j = 0$$

النقطة $(-2, 4)$ تقع على الدائرة

$$(1) \quad -20 = j + 8l + 4k$$

النقطة $(6, 8)$ تقع أيضاً عليها

$$(2) \quad 12 = j + 16l + 8k$$

المركز $(-l, -k)$ يقع على المستقيم $s - v + 1 = 0$

$$(3) \quad -1 = k + l$$

بحل المعادلات (1) ، (2) ، (3) آنياً نحصل على :

$$l = -3, \quad k = -4, \quad j = 0$$

وتكون المعادلة المطلوبة :

$$s^2 + v^2 - 6s - 8v = 0$$

" استخدم الطريقة الثانية لحل هذا المثال "

تمرين (٦ - ٣)

(١) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط :

$$(أ) \quad (0, 0), (0, 8), (6, 0)$$

$$(ب) \quad (0, 4), (-2, 0), (5, 2)$$

$$(ج) \quad (1, 0), (1, 5), (2, 3)$$

$$(د) \quad (2, 3), (-2, 7), (2, 1)$$

(٢) جد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها النقطتان :

$$(أ) \quad (0, 2), (2, 0)$$

$$\begin{aligned} & \text{(ب) } (1, 6), (3-, 2-) \\ & \text{(ج) } (1, 2-), (2, 1-) \\ & \text{(د) } (1, \frac{1}{2}), (7, 5-) \end{aligned}$$

(٣) اثبت أن النقاط

$$\text{أ } (0, 0), \text{ ب } (1, 3), \text{ ج } (2, 1), \text{ د } (1-, 2)$$

رؤوس رباعي دائري .

(٤) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $(5, 3)$ ، $(7, 3-)$ ويقع مركزها على المحور السيني .

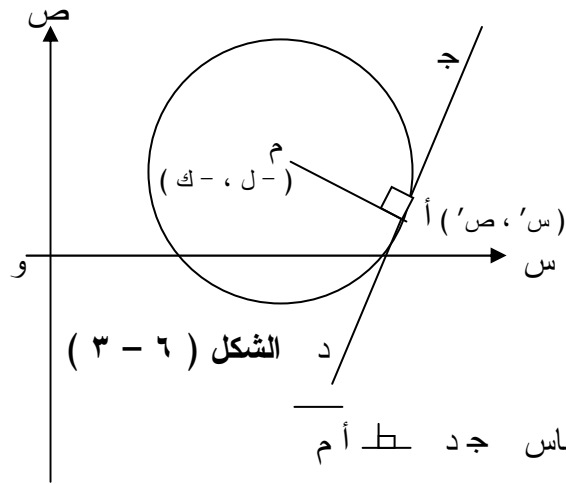
(٥) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $(3-, 5)$ ، $(0, 1)$ ويقع مركزها على المستقيم ٢ س - ٣ ص = ٦ .

(٦) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $(2-, 5)$ ، $(1, 2-)$ ويقع مركزها على المستقيم ٣ س + ص = ٢ .

(٦ - ٤) معادلة المماس لدائرة عند نقطة عليها :

إن وضع أى مستقيم بالنسبة لدائرة معينة هو إما أن يقطع المستقيم الدائرة في نقطتين مختلفتين ، ويسمى المستقيم في هذه الحالة قاطعاً للدائرة . وإما أن يشترك المستقيم مع الدائرة في نقطتين منطقتين في نقطة أ مثلاً ويسمى المستقيم في هذه الحالة مماساً للدائرة وتسمى النقطة أ نقطة التماس . وإما ألا يشترك المستقيم مع الدائرة في أى نقطة . فإذا كان المستقيم مماساً للدائرة فإن بعده عن مركز الدائرة في هذه الحالة يكون مساوياً لنصف قطر الدائرة فالمستقيم ج د في الشكل (٧ - ٣) مماساً للدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + ج = ٠$ عند النقطة أ (س' ، ص') وحيث أن مركز الدائرة م (- ل ، - ك) ، فإن ميل نصف القطر المار بنقطة التماس هو :

$$\frac{ص' + ك}{س' + ل}$$



وبما أن المماس ج د ط أ م

$$\therefore \text{ميل المماس ج د} = - \frac{\text{س}' + \text{ل}}{\text{ص}' + \text{ك}}$$

$\therefore$ معادلة المماس :

$$\text{ص} - \text{ص}' = \frac{\text{س}' + \text{ل}}{\text{ص}' + \text{ك}} (\text{س} - \text{س}')$$

$$\Leftrightarrow (\text{ص} - \text{ص}') (\text{ص}' + \text{ك}) = (\text{س} - \text{س}') (\text{س}' + \text{ل})$$

$$\Leftrightarrow (\text{ص} - \text{ص}') (\text{ص}' + \text{ك}) + (\text{س} - \text{س}') (\text{س}' + \text{ل}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{ص} \text{ص}' + \text{ك} \text{ص} - \text{ص}' \text{ك} - \text{ص}' \text{ص} + \text{س} \text{س}' + \text{ل} \text{س} - \text{س}' \text{ل} - \text{س}' \text{س} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{س} \text{س}' + \text{ص} \text{ص}' + \text{ل} \text{س} + \text{ك} \text{ص} = \text{ص}' \text{ك} + \text{س}' \text{ل} + \text{س}' \text{ص} + \text{ك} \text{ص}'$$

وبإضافة المقدار ل س' + ك ص' + ج للطرفين ينتج :

$$\text{س} \text{س}' + \text{ص} \text{ص}' + \text{ل} (\text{س} + \text{س}') + \text{ك} (\text{ص} + \text{ص}') = \text{ج} + \text{س}' \text{س}$$

$$+ \text{ص}' \text{ل} + \text{س}' \text{ك} + \text{ص}' \text{ك} + \text{ج}$$

وبما أن النقطة (س', ص') تقع على الدائرة ، فإنها تحقق معادلتها .

$$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 + 2 \text{ل} \text{س} + 2 \text{ك} \text{ص} + \text{ج} = 0$$

∴ الطرف الأيسر من معادلة المماس يساوى الصفر

∴ معادلة المماس :

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 2 \text{ل} (\text{س} + \text{س}') + 2 \text{ك} (\text{ص} + \text{ص}') + \text{ج} = 0$$

مثال (١) :

جد معادلتى المماس والعمودى للدائرة :

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 8 \text{س} - 10 \text{ص} + 21 = 0$$

عند النقطة $(1, 2^-)$ الواقعة عليها .

الحل :

$$\text{ل} = 4, \text{ك} = -5$$

معادلة المماس هى :

$$2^- \text{س} + \text{ص} + 4 (\text{س} - 2) - 5 (\text{ص} + 1) + 21 = 0$$

أى $2^- \text{س} - \text{ص} + 4 = 0$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \frac{1^-}{2^-} = \frac{1}{2}$$

ميل العمودى $2^- =$

$$\therefore \text{معادلة العمودى} : \text{ص} - 1 = 2^- (\text{س} + 2)$$

$$\text{أى } \text{ص} + 2 \text{س} + 3 = 0$$

مثال (٢) :

تحقق أن النقطة $(2, 3^-)$ تقع على الدائرة

$$2 \text{س}^2 + 2 \text{ص}^2 - \text{س} + 5 \text{ص} - 9 = 0$$

ثم جد معادلة المماس المرسوم عندها لهذه الدائرة .

الحل :

$$\text{بوضع } \text{س} = 2, \text{ص} = 3^- \text{ فى الطرف الأيمن من معادلة الدائرة}$$

نحصل على :

$$٠ = ٢٦ - ٢٦ = ٩ - ١٥ - ٢ - ١٨ + ٨$$

= الطرف الأيسر

∴ النقطة (٢ ، ٣⁻) تقع على الدائرة . بالقسمة على ٢ لجعل معاملى س^٢ ، ص^٢ يساويان الواحد الصحيح :

$$٠ = \frac{٩}{٢} - ص \frac{٥}{٢} + س \frac{١}{٢} - ٢ ص + ٢ س$$

$$\therefore \frac{٩}{٢} = ج ، \quad \frac{٥}{٤} = ك ، \quad \frac{١}{٤} - = ل$$

∴ معادلة المماس :

$$٠ = \frac{٩}{٢} - (٣ - ص) \frac{٥}{٤} + (٢ + س) \frac{١}{٤} - ٣ ص + ٢ س$$

$$\therefore ٠ = \frac{٩}{٢} - \frac{١٥}{٤} - ص \frac{٥}{٤} + \frac{١}{٢} - س \frac{١}{٤} - ٣ ص + ٢ س$$

$$٠ = ٣٥ - ٧ ص - ٧ س$$

$$\therefore ٠ = ٥ - ص - س$$

تمرين (٦ - ٤)

(١) جد معادلات المماسات للدائرة :

س^٢ + ص^٢ = ٢٥ عند النقاط التالية

أ (٤ ، ٣) ، ب (٥ ، ٠) ، ج (-٤ ، ٣) ، د (٠ ، -٥)

(٢) جد معادلات المماسات للدوائر الآتية عند النقاط المعينة .

(أ) س^٢ + ص^٢ - ٤ س - ٦ ص + ٣ = ٠ عند النقطة (٥ ، ٤)

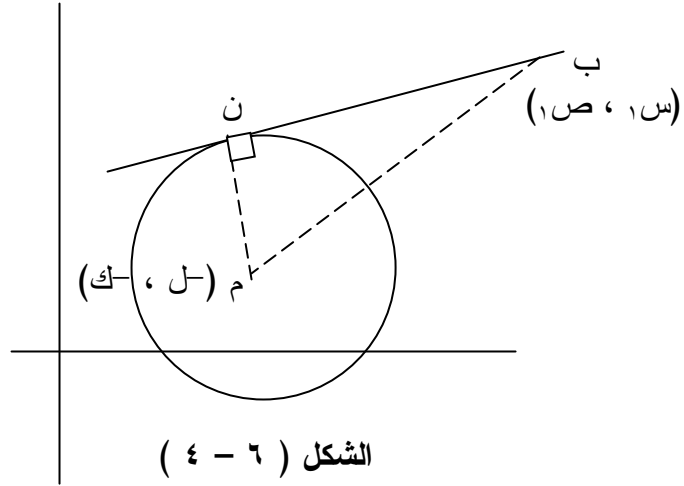
(ب) س^٢ + ص^٢ - ١٠ ص = ٠ عند النقطة (٣ ، ١)

(ج) س^٢ + ص^٢ + ٤ س + ٥ ص = ٠ عند النقطة (٠ ، ٠)

(د) ٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٨ س - ٨ ص - ١٠ = ٠ عند النقطة (٠ ، ٥)

- (٣) بين أن المستقيم ل : س + ٢ ص = ١٢ مماس للدائرة
 ن : س^٢ + ص^٢ - ٦ س = ٨ - ص
 (٤) جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم ل :
 ٢ س = ٣ ص + ١٣
 (٥) جد معادلة الدائرة التي مركزها (١ ، ٢) وتمس المستقيم
 ل : ٤ س - ٣ ص + ١٢ = ٠

- (٦ - ٥) طول المماس المرسوم للدائرة من نقطة خارجها :
 نفرض أن المطلوب إيجاد طول المماس المرسوم للدائرة :
 س^٢ + ص^٢ + ٢ ل + ٢ س + ٢ ك ص = ٠
 من النقطة ب (س_١ ، ص_١) . فإذا كانت م مركز الدائرة ن نقطة
 التماس شكل (٦ - ٤) .



∴ نجد أن :
 $\overline{BN}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{MN}^2$
 ∴ $\overline{BN}^2 = (S_1 + L)^2 + (V_1 + K)^2 - (MN)^2$
 وبما أن $\overline{MN}^2 = L^2 + K^2 - ٢ ل - ٢ ك ص - ١٢$

$$\therefore \overline{ب ن}^2 = 2س_1 + 2ل_1 + 2ص_1 + 2ك_1 + 2ل_2 - 2ك_2 - 2ل_3 + 2ج = 2س_1 + 2ص_1 + 2ل_2 + 2ك_2 + 2ص_3 + 2ج$$

أى أن مربع طول المماس للدائرة نحصل عليه من معادلة الدائرة بعد جعلها صفرية وجعل معاملى $س_2$ ، $ص_2$ الوحدة ثم التعويض عن $س$ بالقيمة $س_1$ وعن $ص$ بالقيمة $ص_1$ في الطرف الأيمن للمعادلة .
فإذا كان ناتج التعويض موجباً كان المماس حقيقياً أى أن النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) تقع خارج الدائرة .
أما إذا كان ناتج التعويض سالباً فإن المماس تخيلياً وأن النقطة تقع داخل الدائرة .

وواضح أنه إذا كان مساوياً الصفر فإن النقطة تقع على الدائرة .

مثال (١) :

جد طول المماس المرسوم للدائرة $س_2 + 2ص_2 = 4$ من النقطة $(-2, -9)$.

الحل :

$$\text{طول المماس} = \sqrt{4 - 81 + 4} = \sqrt{81} = 9 \text{ وحدات}$$

مثال (٢) :

جد طول المماس من النقطة $(2, -3)$ إلى الدائرة :
 $س_2 + 2ص_2 - 2س_3 - 8ص_3 + 21 = 0$

الحل :

$$\text{مربع طول المماس} = 2س_1 + 2ص_1 + 2س_2 - 8ص_2 + 21 = 3$$

حيث $س_1 = 2$ ، $ص_1 = -3$

$$\therefore \text{مربع طول المماس} = 4 - 9 + 4 + 24 + 21 = 54$$

$$\therefore \text{طول المماس} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \text{ وحدة}$$

تمرين (٦ - ٥)

جد طول المماس لكل من الدوائر التالية من النقطة الموضحة في كل

حالة :

- (١) $س٢ + ص٢ = ٢٥$ من النقطة (٦ ، ٣)
- (٢) $س٢ + ص٢ = ٤٠$ من النقطة (٨- ، ٥-)
- (٣) $س٢ + ص٢ + ٢س + ٥ص = ٠$ من النقطة (٣ ، ٢-)
- (٤) $س٢ + ص٢ - ٤س - ٨ص = ٣٧$ من النقطة (٥- ، ٣)
- (٥) $س٢(٣ -) + ص٢(٤ -) = ٤$ من النقطة (٢ ، ١)
- (٦) $س٢(س٢ + ص٢) - ٣س + ١ص = ٠$ من النقطة (١ ، ١-)
- (٧) $س٢ + ص٢ - ٤ص = ٢س + ٤$ من النقطة (٦ ، ٥)
- (٨) $س٢ - ٤س = ٢ص - ص٢ - ٤$ من النقطة (٣ ، ٢-)

الوحدة السابعة

مجموعة الأعداد المركبة

أهداف الوحدة السابعة

بعد دراسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن :-

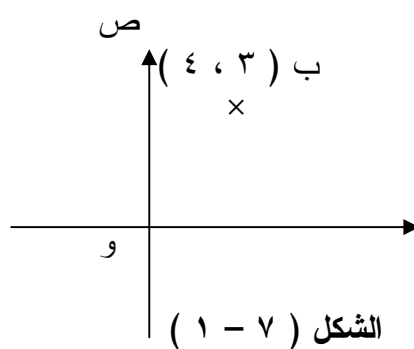
١. يمثل الأعداد المركبة بيانياً .
٢. يمثل الأعداد المركبة بالصورة المثلثية (بالصورة القطبية) .
٣. يتعرف التمثيل البياني والتمثيل المثلثي (الصورة القطبية) للعدد المركب.
٤. يتعرف خواص الصورة القطبية للعدد المركب .
٥. يتعرف القوى ونظرية دي موافر .
٦. يجد جذور الأعداد المركبة .
٧. يحل معادلات الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد المركبة .
٨. يتعرف الجذور التكعيبية للواحد الصحيح .

(٧ - ١) التمثيل البياني والصورة القطبية للعدد المركب :

(أ) التمثيل البياني :

مر بنا سابقاً أن العدد المركب $a + b\tau$ يمكن التعبير عنه في صورة زوج مرتب (a, b) مسقطه الأول الجزء الحقيقي ، ومسقطه الثاني الجزء التخيلي ؛ لذلك يمكن تمثيل الأعداد المركبة بنقط في مستوى إحداثيات يمثل المحور السيني فيه الأجزاء الحقيقية للأعداد المركبة ، ويمثل المحور الصادي فيه الأجزاء التخيلية للأعداد المركبة .

إذن تلاحظ بسهولة أن كل نقطة من المستوى تقابل عدداً مركباً واحداً ،
والعكس كل عدد مركب يتمثل بنقطة واحدة من المستوى المذكور . يسمى هذا
المستوى مستوى الأعداد المركبة أو مستوى آرقند ، كما يطلق عادة على
المحور السيني في هذه الحالة اسم المحور الحقيقي وعلى المحور الصادي اسم
المحور التخيلي . وواضح أن جميع الأعداد المركبة من النوع (س ، ٠) تقع
على المحور الحقيقي ، وجميع الأعداد من النوع (٠ ، ص) تقع على
المحور



التخليفي ففي الشكل (٧ - ١)
العدد المركب الممثل بالنقطة
(٣ ، ٤) مثلاً يمكن أن يقرأ
إما (٣ ، ٤) أو ٣ + ٤ ت .
ولهذا فإننا قد نشير أحياناً
إلى العدد المركب س + ص ت
بالنقطة (س ، ص) .

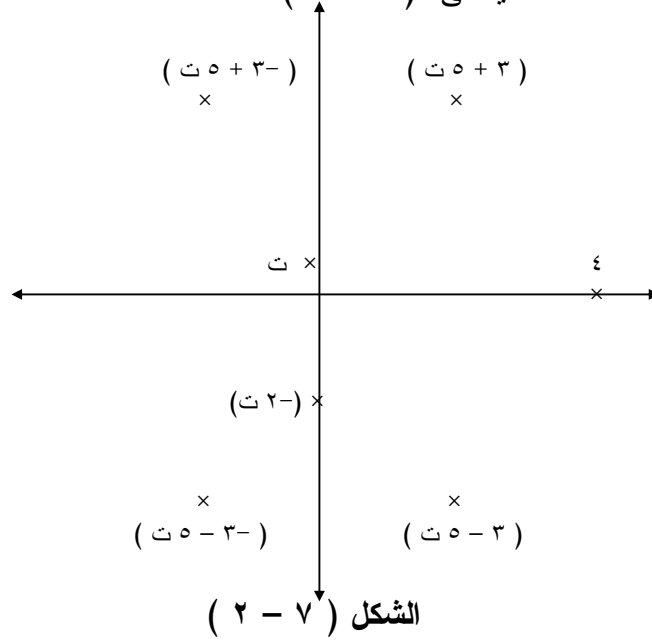
مثال (۱) :

اكتب كلاً من الأعداد التالية على صورة زوج مرتب ثم مثلها بيانياً على المستوى المركب :

، ٥-٣، ٥-٣-، ٥+٣-، (٥+٣)
٤، ٢-، ت

الحل :

العدد $(3 + 5 \text{ ت})$ يكافئ $(3, 5)$
العدد $3 - 5 \text{ ت}$ يكافئ $(-3, 5)$
العدد $3 - 5 \text{ ت}$ يكافئ $(-3, -5)$
العدد $3 - 5 \text{ ت}$ يكافئ $(3, -5)$
العدد 0 يكافئ $(0, 1)$
العدد $2 - 5 \text{ ت}$ يكافئ $(-2, 0)$
العدد 4 يكافئ $(4, 0)$

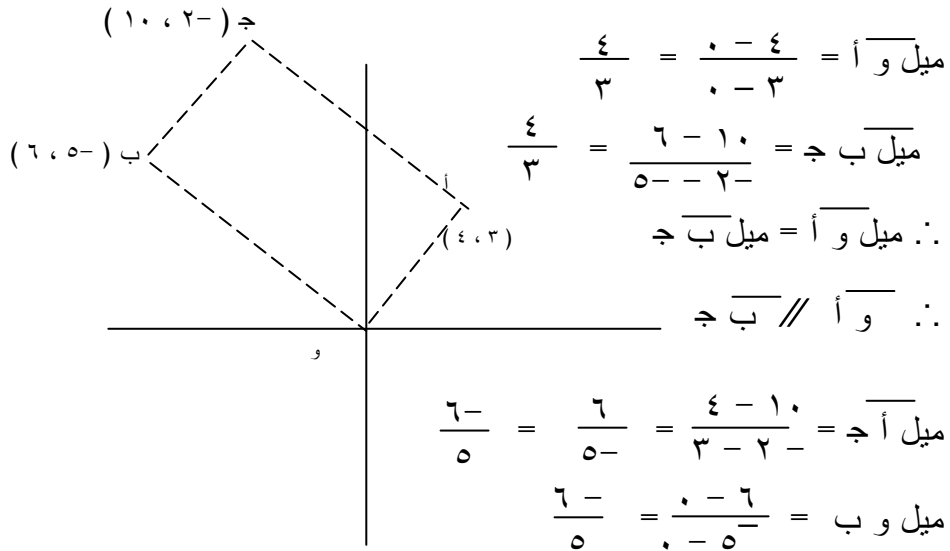


مثال (٢) :

اثبت أن النقاط أ ، ب ، ج ، و ، والتي تمثل الأعداد المركبة $(3 + 4 \text{ ت})$ ، $(-5 + 6 \text{ ت})$ ، $(-2 + 10 \text{ ت})$ ، (صفر) على الترتيب هي رؤوس متوازي أضلاع .

الحل :

النقطة أ (٤ ، ٣) تمثل العدد المركب (٣ + ٤ ت)
 النقطة ب (٦ ، ٥⁻) تمثل العدد المركب (٥ - ٦ ت)
 النقطة ج (١٠ ، ٢⁻) تمثل العدد المركب (٢ - ١٠ ت)
 النقطة و (٠ ، ٠) تمثل العدد المركب صفر .
 الشكل (٣ - ٦) تمثيل لهذه الأعداد :



الشكل (٣ - ٧)

$\therefore$ ميل أ = ميل ب

$\therefore$ أ ج // و ب

$\therefore$ الشكل و أ ج ب متوازي أضلاع

ملاحظة :

تلاحظ في المثال السابق أن :

٣ + ٤ ت تمثل بالنقطة أ ، ٥ - ٦ ت تمثل بالنقطة ب ، وأن مجموعهما
 (٣ + ٤ ت) + (٥ - ٦ ت) = ١٠ + ٢⁻ ت يمثل بالنقطة ج .

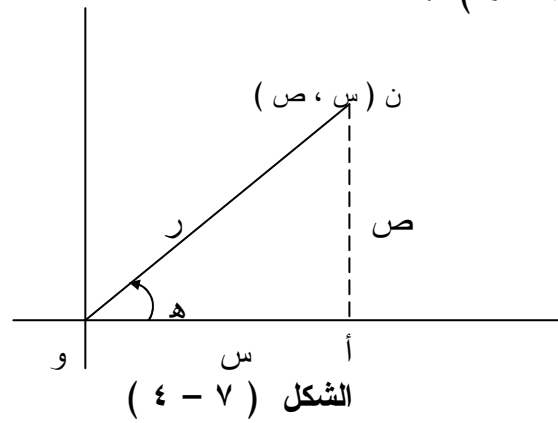
ماذا تلاحظ في النقاط التي تمثل الأعداد المركبة التالية (٥ - ٣ ت) ، (٦ - ٤ ت) ، (١ - ٧ ت) ، صفر .

بصورة عامة :

إذا مثل عدنان مركبان بالنقطتين أ ، ب في المستوى المركب فإن مجموعهما يمثل بالنقطة ج الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع و أ ج ب حيث و نقطة الأصل .

(ب) التمثيل المثلثي (الصورة القطبية) للأعداد المركبة :

العدد المركب $ع = س + ت$ ص يقابله في مستوى ارقند النقطة (س ، ص) كما في الشكل (٧ - ٤) :



من الشكل :

$ر = \sqrt{س^2 + ص^2}$ يسمى ر (و ن) القيمة المطلقة للعدد المركب ع أو طول ع أو المقياس للعدد ع ويرمز له بالرمز | ع | أو ر .
 $ر \neq 0$ إلا إذا كان $س = ص = 0$

العدد المركب الوحيد الذي طوله الصفر هو العدد الصفري

$\angle هـ$ تسمى زاوية العدد المركب أو السعة للعدد المركب لاحظ أن زاوية العدد المركب قد تكون هـ أو $هـ + ٢ ك$ π (ك $\exists$ ص) .

من الشكل :

$$س = ر جتا ه (١)$$

$$ص = ر جا ه (٢)$$

$$ع = س + ص ت (٣)$$

بتعويض (١) و (٢) في المعادلة (٣) :

$$ع = ر (جتا ه + ت جا ه)$$

وهي ما تعرف بالصورة المثلثية أو الصورة القطبية للعدد المركب وتكتب أحيانا في الصورة المختصرة [ر ، ه] .

يكتب العدد المركب (ع) بصورتين :

الصورة الأولى : $ع = س + ت ص$ وتسمى بالصورة الديكارتية ويمثل في المستوى الديكارتي بالنقطة (س ، ص) .

الصورة الثانية : $ع = ر (جتا ه + ت جا ه)$

حيث $ر \equiv$ القيمة المطلقة للعدد المركب

$ه \equiv$ زاوية العدد المركب أو السعة

وتسمى بالصورة القطبية وتمثل في المستوى الديكارتي (شكل أرقند) بالصورة [ر ، ه]

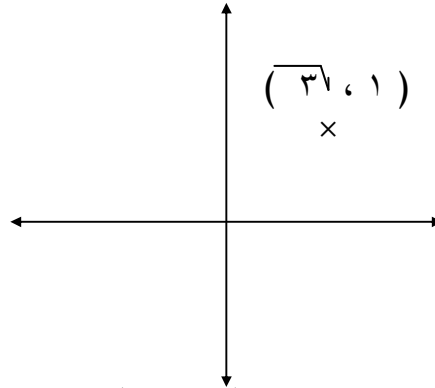
مثال (٣) :

بين العدد المركب $ع = ١ + \sqrt{٣} ت$ على المستوى الديكارتي ثم مثله بالصورة القطبية .

الحل :

$$ع = ١ + \sqrt{٣} ت$$

يمثل المستوى الديكارتي بالنقطة (٣ ، ١)



الشكل (٥ - ٧)

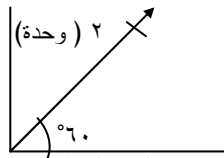
$$r = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{r} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{r}$$

الزاوية التي جيب تمامها $\frac{3}{\sqrt{10}}$ وجيبها $\frac{1}{\sqrt{10}}$ هي 60°

$$\therefore \theta = 60^\circ \quad (\cos 60^\circ = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ و } \sin 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{10}})$$

ويمثل في شكل أرقند بالصورة [٢ ، ٦٠]



ويمكن التحويل من الصورة الديكارتية إلى القطبية بالطريقة التالية :

$$r = \sqrt{3^2 + 1^2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \quad (\cos 60^\circ = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ و } \sin 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{10}})$$

$$\therefore \text{جناه} = \frac{1}{2} ، \text{جا ه} = \frac{\sqrt{3}}{2} ، \therefore \text{ه} = 60^\circ ،$$

$$\therefore \text{ع} = 2 (\text{جتا } 60^\circ + \text{ت جا } 60^\circ)$$

ويمكن في ضوء العلاقات السابقة تحويل العدد المركب من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية أو العكس .

مثال (٤) :

إذا كانت الصورة القطبية للعدد المركب هي $[\frac{\pi}{6} , 4]$ اكتب الصورة الديكارتية له .

الحل :

$$r = 4 ، \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{س} = 4 \text{ جتا } \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \times 4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\text{ص} = 4 \text{ جا } \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \times 4 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$\therefore$ الصورة الديكارتية له هي : $2 + \sqrt{3}i$

مثال (٥) :

عبر عن المقدار $\frac{\sqrt{2} (1 + i)}{1 + i}$ بالصورة القطبية ثم مثل العدد الناتج على شكل أرقند .

الحل :

نحول أولاً إلى الصورة $a + bi$

$$\frac{\sqrt{2} (1 + i)}{1 + i} = \frac{\sqrt{2} (1 + i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{\sqrt{2} (1 + i)}{1 - i^2} = \frac{\sqrt{2} (1 + i)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

ويوضع المقدار في الصورة القطبية

$$أ = \sqrt{٢١} \angle - = ب - \sqrt{٢١} \angle$$

$$٨ = \sqrt{٣٢ + ٣٢} \angle = ر$$

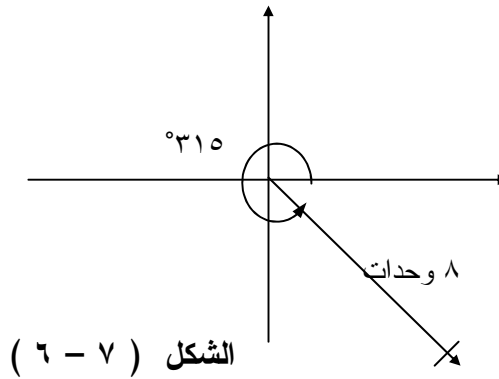
$$\therefore \sqrt{٢١} \angle - \sqrt{٢١} \angle = ت \quad \left(\frac{\sqrt{٢١}}{٢} - \frac{\sqrt{٢١}}{٢} \right) \quad ٨ =$$

$$\therefore \frac{\sqrt{٢١}}{٢} = جتا هـ ، \quad \frac{\sqrt{٢١}}{٢} = جا هـ$$

$$\therefore هـ = ٣١٥^\circ$$

$$\therefore \sqrt{٢١} \angle - \sqrt{٢١} \angle = ٨ = (جتا ٣١٥^\circ + ت جا ٣١٥^\circ)$$

ويكون العدد ممثلاً على شكل آر قند كما في الشكل (٦ - ٦) التالي :



الشكل (٦ - ٧)

تمرين (٧ - ١)

(١) عيّن على المستوى المركب الأعداد الآتية :

$$(أ) \quad ١ + ٤ \angle ت \quad (ب) \quad ١ - ٤ \angle ت \quad (ج) \quad ٦ = ٣ \angle ت$$

$$(د) \quad ٤ - ٢ \angle ت$$

(٢) جد أطوال الأعداد المركبة التالية :

$$(أ) \quad \sqrt{٣١} + ت \quad (ب) \quad ٤ + ٣ \angle ت \quad (ج) \quad ١ + \sqrt{٣١} \angle ت$$

$$(د) \quad \frac{١}{\sqrt{٢١}} + \frac{ت}{\sqrt{٢١}}$$

(٣) جد السعة لكل من الأعداد التالية :

(أ) $3 - \sqrt{1}$ ت + (ب) $3 - \sqrt{1}$ ت - (ج) $3 - \sqrt{1}$ ت + (د) $3 - \sqrt{1}$ ت -

(٤) اكتب كلا من الأعداد التالية في الصورة القطبية .

(أ) $2 + 2\sqrt{3}$ ت (ب) $5 - 3\sqrt{5}$ ت

(ج) $\frac{4}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$ ت (د) $8 -$

(٥) اكتب في الصورة الديكارتية :

(أ) $[8, 60^\circ]$ (ب) $[4, 20^\circ]$ (ج) $[3, -\frac{\pi}{6}]$

(د) $[3, \frac{3\pi}{2}]$

(٦) عبر عن الأعداد التالية في الصورة القطبية ثم مثلها بيانياً .

(أ) $2 + 2\sqrt{3}$ ت (ب) $5 + 5$ ت (ج) $6 - 2\sqrt{1}$ ت (د) $3 -$ ت

(٧ - ٢) بعض خواص الصورة القطبية للعدد المركب :

عرفنا سابقاً كيف يمكن إيجاد حاصل ضرب عددين مركبين في الصورة الديكارتية ، ولنر حاصل ضربهما عندما يكون العددين في الصورة القطبية ، فالعددين :

$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)$

$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$

فإن حاصل ضربهما :

$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$

$= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + j [\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2])$

$= r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + j \sin (\theta_1 + \theta_2)]$

$= r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$

أى أن حاصل ضرب عددين مركبين عدد مركب مقياسه (طوله) يساوى حاصل ضرب المقياسين وسعته (زاويته) تساوى مجموع الزاويتين .

مثلاً :

$$\begin{aligned} 4 (\text{جتا } 30 + \text{ت جا } 30) \times 8 (\text{جتا } 60 + \text{ت جا } 60) \\ = 32 (\text{جتا } 90 + \text{ت جا } 90) \\ = 32 (0 + \text{ت}) = 32 \text{ ت} \end{aligned}$$

ومن القاعدة السابقة يمكننا استخلاص بعض الخواص والنتائج منها :

- (أ) بما أن زاوية أي عدد من الشكل (س ، ٠) تساوى (الصفر + ٢ ك π) . وعلى هذا فإن حاصل ضرب أي عدد من هذا النوع بعدد مركب آخر لا يغير زاوية الأخير . فمثلاً زاوية (٥ + ٣ ت) لا تختلف عن زاوية ٦ (٥ + ٣ ت) . أي أن ضرب العدد المركب بعدد حقيقي لا يغير من زاوية العدد المركب .
- (ب) إذا كان $\text{ع} = \text{س} + \text{ت ص}$ ، فإننا نعلم أن :
- $$\text{ع} = (\overline{\text{س}} + \text{ت ص}) (\text{س} - \text{ت ص}) = \text{س}^2 - \text{ت ص}^2 = \text{ر}^2$$
- حيث أن $| \text{ر} |$ تساوى مقياس العدد المركب وهو عدد حقيقي سعتة (صفر + π) .

ومن هذا نستنتج أن زاوية مرافق عدد مركب تساوى زاوية هذا العدد بعد تغيير إشارتها (إذ أن مجموعهما الصفر) وأن طول أي عدد يساوى طول مرافق هذا العدد إذ أن حاصل ضربيهما ر^2 .

$$(ج) \text{ لما كان } \frac{1}{\text{ع}} = \frac{\overline{\text{ع}}}{\text{ع} \overline{\text{ع}}} = \frac{1}{\text{ع}} \cdot \frac{1}{\overline{\text{ع}}}$$

فمقلوب العدد المركب يساوى حاصل ضرب مرافقه بالعدد

الموجب . $\frac{1}{\overline{\text{ع}}} = \frac{1}{\text{ع}}$ ومن هذا نجد أن زاوية مقلوب العدد المركب تساوى زاوية

العدد بعد تغيير إشارتها . كما أن طول مقلوب أي عدد مركب يساوى مقلوب طول هذا العدد حيث أن :

$$\left| \frac{1}{\overline{\text{ع}}} \right| = \left| \frac{1}{\text{ع}} \right| \cdot \left| \frac{1}{\overline{\text{ع}}} \right| = \left| \frac{1}{\text{ع} \overline{\text{ع}}} \right| = \left| \frac{1}{\text{ع}} \right|$$

(د) بما أن حاصل قسمة عدد مركب ع_1 على آخر ع_2 هو حاصل ضرب الأول بمقلوب الثاني .

فإن طول $\frac{١٤}{٢٤}$ يساوى حاصل قسمة طول ١٤ على طول ٢٤ وأن
زاوية حاصل القسمة تساوى حاصل طرح زاوية ٢٤ من زاوية ١٤ .
فإذا كان ١٤ = [٨ ، ٦٠ °] ، ٢٤ [٤ ، ٤٥ °]

$$[١٥ ، ٢] = [(٤٥ - ٦٠) ، \frac{٨}{٤}] = \frac{١٤}{٢٤}$$

مثال (١) :

جد قيمة ما يأتي :

$$(أ) ٨ (\text{جتا } \frac{\pi}{٣} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٣}) \times ٦ (\text{جتا } \frac{\pi}{٤} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٤})$$

$$(ب) ١٢ (\text{جتا } ٢٤٠^\circ + \text{ت جا } ٢٤٠^\circ) \div ٦ (\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ)$$

الحل :

$$(أ) ٨ (\text{جتا } \frac{\pi}{٣} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٣}) \times ٦ (\text{جتا } \frac{\pi}{٤} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٤})$$

$$= ٤٨ \text{ جتا } (\frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٣}) + \text{ت جا } (\frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٣})$$

$$= ٤٨ (\text{جتا } \frac{\pi}{١٢} + \text{ت جا } \frac{\pi}{١٢})$$

$$(ب) ١٢ (\text{جتا } ٢٤٠^\circ + \text{ت جا } ٢٤٠^\circ) \div ٦ (\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ)$$

$$= \frac{١٢}{٦} [\text{جتا } (٢٤٠^\circ - ٣٠^\circ) + \text{ت جا } (٢٤٠^\circ - ٣٠^\circ)]$$

$$= ٢ (\text{جتا } ٢١٠^\circ + \text{ت جا } ٢١٠^\circ)$$

مثال (٢) :

إذا كان ${}_1ع = [٨, ٦٠^\circ]$ ، ${}_2ع = [٤, ١٢٠^\circ]$ جد ما يأتي :

$$(أ) \quad {}_1ع \cdot {}_2ع \quad (ب) \quad \frac{{}_1ع}{{}_2ع} \quad (ج) \quad \frac{1}{{}_1ع} \quad (د) \quad {}_2ع^2$$

الحل :

$$(أ) \quad {}_1ع \cdot {}_2ع = [٨, ٦٠^\circ] \times [٤, ١٢٠^\circ] = [٣٢, ١٨٠^\circ]$$

$$(ب) \quad \frac{{}_1ع}{{}_2ع} = [٨, ٦٠^\circ] \div [٤, ١٢٠^\circ] = [٢, ٦٠^\circ]$$

$$(ج) \quad \frac{1}{{}_1ع} = \frac{1}{[٨, ٦٠^\circ]} = [٨, ٦٠^\circ]$$

$$(د) \quad {}_2ع^2 = [٨, ٦٠^\circ]^2 = [٦٤, ١٢٠^\circ]$$

تمرين (٧ - ٢)

$$(١) \quad \text{إذا كان } {}_1ع = ٣ \text{ (جتا } \frac{\pi}{٦} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٦})$$

$${}_2ع = ١٢ \text{ (جتا } \frac{\pi}{٣} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٣}) \text{ جد :}$$

$$(أ) \quad {}_1ع \cdot {}_2ع \quad (ب) \quad \frac{{}_2ع}{{}_1ع} \quad (د) \quad {}_2ع^2 \quad (ج) \quad \frac{1}{{}_2ع}$$

(٢) جد ناتج ما يلي :

$$(أ) \quad ٦ \left(\text{جتا } \frac{\pi}{٣} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٣} \right) \times ٢ \left(\text{جتا } \frac{\pi}{٢} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٢} \right)$$

$$(ب) \quad ٨ \left(\text{جتا } ١٢٠^\circ + \text{ت جا } ١٢٠^\circ \right) \div ٤ \left(\text{جتا } ٣٠^\circ - \text{ت جا } ٣٠^\circ \right)$$

$$(ج) \quad ٣ \left(\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ \right) \times ٢ \left(\text{جتا } ٦٠^\circ + \text{ت جا } ٦٠^\circ \right)$$

$$(د) \quad [٣ \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right)]^٢$$

$$(ه) \quad ٣ \left(\text{جتا } ٤٠^\circ + \text{ت جا } ٤٠^\circ \right) \times ٤ \left(\text{جتا } ٨٠^\circ + \text{ت جا } ٨٠^\circ \right)$$

(٧ - ٣) القوى ونظرية دي موافر :

لقد تم في الدرس السابق اثبات قاعدة الضرب التالية :

إذا كان :

$$١ع = ١ر \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right)$$

$$٢ع = ٢ر \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right)$$

فإن :

$$١ع \cdot ٢ع = ٢ر \cdot ١ر \left[\text{جتا (ه} + \text{ه)} + \text{ت جا (ه} + \text{ه)} \right]$$

وبالتالي يمكن استنتاج العلاقات التالية بسهولة إذا كان $١ع = ٢ع = ع$ حيث

$$ع = ر \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right) \text{ فإن :}$$

$$٢ع = ر \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right) \cdot ر \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right)$$

$$= ر^٢ \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right)^٢$$

$$\text{وكذلك } ع^٢ = ع \cdot ع = ر^٢ \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right)^٢ \cdot ر \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right)$$

$$= ر^٣ \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right)^٣$$

وهكذا يكون :

$$ع^٣ = ر^٣ \left(\text{جتا ه} + \text{ت جا ه} \right)^٣$$

تسمى هذه الصيغة الأخيرة بنظرية دي مويفير ويمكن التعبير عنها في الصورة $[r, h] = [r_n, n] = [r, h]$.

مثال (١) :

إذا كان $5 + 5\sqrt{31} = e$ جد : $e^{\frac{1}{3}}$

الحل :

من الأفضل كتابة العدد في الصورة القطبية حيث :

$$r = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{31})^2} = 10$$

$$e = 10 \left(\frac{5}{10} + i \frac{5\sqrt{31}}{10} \right) = 10 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{31}}{2} \right)$$

$$= 10 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{31}}{2} \right)$$

$$\cos h = \frac{1}{2}$$

$$\sin h = \frac{\sqrt{31}}{2}$$

$$\therefore h = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore e = 10 \left[\frac{\pi}{3}, 10 \right] = e^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{\pi}{3}, 10 \right] = \left[\frac{\pi}{3}, 10 \right]$$

$$= 10 \left[\pi \cos h + i \pi \sin h \right] = 10 \left[\pi \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{31}}{2} \right) \right]$$

مثال (٢) :

إذا كان $ع = ١ + ت$ فاحسب $ع'$

الحل :

$$ع = (١ + ت) \Leftrightarrow ر = \overline{٢١}$$

$$\therefore ع = \overline{٢١} = \left(\frac{1}{\overline{٢١}} + \frac{1}{\overline{٢١}} ت \right)$$

$$ع = \overline{٢١} = \left(\frac{\pi}{٤} \text{ جتا} + ت \text{ جا} \frac{\pi}{٤} \right) = \left[\frac{\pi}{٤}, \overline{٢١} \right]$$

$$\therefore ع' = \left[\overline{٢١} \right]' = \left[\frac{\pi}{٤}, ٣٢ \right] = \left[\frac{\pi}{٤}, ٣٢ \right] = \left[\frac{\pi}{٤}, ١٠ \right]$$

$$\therefore ع' = ٣٢ = \left(\frac{\pi}{٤} \text{ جتا} + ت \text{ جا} \frac{\pi}{٤} \right) = ٣٢ ت$$

مثال (٣) :

مستخدماً نظرية دى موافر اثبت صحة العلاقات المثلثية التالية :

$$\text{جتا } ٢ ه = \text{جتا } ٢ ه - \text{جا } ٢ ه$$

$$\text{جا } ٢ ه = \text{جا } ٢ ه \text{ جتا} ه$$

$$\text{جتا } ٣ ه = \text{جتا } ٤ ه - \text{جتا } ٣ ه$$

$$\text{جا } ٣ ه = \text{جا } ٣ ه - \text{جا } ٤ ه$$

الحل :

من القانون

$$[ر (\text{جتا} ه + ت \text{ جا} ه)]^{\circ} = ر^{\circ} (\text{جتا} ن ه + ت \text{ جا} ن ه)$$

$$\Leftrightarrow ر^{\circ} (\text{جتا} ن ه + ت \text{ جا} ن ه) = ر^{\circ} (\text{جتا} ه + ت \text{ جا} ه)^{\circ}$$

$$\Leftrightarrow \text{جتا} ن ه + ت \text{ جا} ن ه = (\text{جتا} ه + ت \text{ جا} ه)^{\circ}$$

بوضع $ن = ٢$

$$\text{جتا } ٢ ه + ت \text{ جا } ٢ ه = (\text{جتا} ه + ت \text{ جا} ه)^{\circ}$$

$$= \text{جتا } ٢ ه - \text{جا } ٢ ه + ٢ ت \text{ جتا} ه \text{ جا} ه$$

ومنه نستنتج أن :

$$\text{جتا } 2^{\circ} \text{ هـ} = \text{جتا } 2^{\circ} \text{ هـ} - \text{جا } 2^{\circ} \text{ هـ}$$

$$\text{جا } 2^{\circ} \text{ هـ} = 2^{\circ} \text{ جا } 2^{\circ} \text{ هـ جتا } 2^{\circ} \text{ هـ}$$

أما إذا وضع ن = 3 فإننا نجد :

$$\text{جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} + \text{ت جا } 3^{\circ} \text{ هـ} = (\text{جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} + \text{ت جا } 3^{\circ} \text{ هـ})$$

$$= (\text{جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} - \text{جا } 3^{\circ} \text{ هـ} + 2^{\circ} \text{ ت جا } 3^{\circ} \text{ هـ جتا } 3^{\circ} \text{ هـ}) (\text{جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} + \text{ت جا } 3^{\circ} \text{ هـ})$$

$$= \text{جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} - \text{جا } 3^{\circ} \text{ هـ} + 2^{\circ} \text{ جا } 3^{\circ} \text{ هـ جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} + \text{ت} (\text{جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} - \text{جا } 3^{\circ} \text{ هـ}) - \text{جا } 3^{\circ} \text{ هـ} + 2^{\circ} \text{ جا } 3^{\circ} \text{ هـ جتا } 3^{\circ} \text{ هـ}$$

$$\therefore \text{جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} = \text{جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} - \text{جا } 3^{\circ} \text{ هـ} + 3^{\circ} \text{ جا } 3^{\circ} \text{ هـ جتا } 3^{\circ} \text{ هـ}$$

$$= 4^{\circ} \text{ جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} - 3^{\circ} \text{ جا } 3^{\circ} \text{ هـ} (\text{بوضع جا } 3^{\circ} \text{ هـ} = 1 - \text{جتا } 3^{\circ} \text{ هـ})$$

$$\text{جا } 3^{\circ} \text{ هـ} = 3^{\circ} \text{ جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} - \text{جا } 3^{\circ} \text{ هـ} + 3^{\circ} \text{ جا } 3^{\circ} \text{ هـ جتا } 3^{\circ} \text{ هـ}$$

$$= 3^{\circ} \text{ جا } 3^{\circ} \text{ هـ} - 4^{\circ} \text{ جا } 3^{\circ} \text{ هـ} (\text{بوضع جتا } 3^{\circ} \text{ هـ} = 1 - \text{جا } 3^{\circ} \text{ هـ})$$

تمرين (٧ - ٣)

$$(١) \text{ جد قيمة } (-1 + \sqrt{3})^{\circ} \text{ ت} \text{ في صورة أ} + \text{ب ت}$$

$$(٢) \text{ إذا كان ع} = \text{جا } 105^{\circ} + \text{ت جتا } 75^{\circ} \text{ جد الصورة القطبية للعدد ع ، ثم جد قيمة ع}^{\circ}$$

$$(٣) \text{ جد قيمة } \frac{(-1 + \sqrt{3})^{\circ} \text{ ت}}{2}$$

$$(٤) \text{ جد قيمة } \left[\frac{3 + \sqrt{11}}{3 - \sqrt{11}} \right]^{\circ} \text{ ت في الصورة أ} + \text{ب ت}$$

$$(٥) \text{ احسب بدلالة جتا هـ ، جا هـ وقواهما كلا من :}$$

$$\text{جتا } 4^{\circ} \text{ هـ} ، \text{جا } 4^{\circ} \text{ هـ}$$

$$(٦) \text{ برهن أن :}$$

$${}^n \left[\frac{1 + \text{ت ظا ه}}{-1 - \text{ت ظا ه}} \right] = \text{جتا } 2\text{ن ه} + \text{ت جا } 2\text{ن ه}$$

(٧ - ٤) جذور الأعداد المركبة :

إذا كان ع عدداً حقيقياً موجباً ، فإنه يوجد عدنان حقيقيان ج = $\pm \sqrt{\text{ع}}$ يحقق كل منهما المعادلة ج^٢ = ع ويسمى $\pm \sqrt{\text{ع}}$ جذري العدد ع .
وإذا كان ع = صفر له جذراً واحداً فإن ج = صفر .
وإذا كان ع عدداً حقيقياً سالباً مثل ع = -أ ، أ > ٠ فإن له جذريين تخيليين هما $\pm \sqrt{-\text{أ}}$.
أما إذا كان ع عدداً مركباً على الصورة أ + ب ت فإن له جذرين تربيعين على الصورة ج = س + ص ت ويحقق كل منهما المعادلة ج^٢ = ع .
أو (س + ص ت)^٢ = أ + ب ت .
والأمثلة التالية توضح طريقة إيجاد الجذور التربيعية للأعداد المركبة .

مثال (١) :

جد الجذرين التربيعيين للعدد -٣٦

الحل :

$$\text{ج}^2 = -36 \Leftrightarrow \text{ج} = \pm \sqrt{-36} = \pm 6\text{ت}$$

∴ الجذران هما $\pm 6\text{ت}$

مثال (٢) :

جد الجذرين التربيعيين للعدد ع = -٥ + ١٢ ت

الحل :

$$(س + ص ت)^2 = -٥ + ١٢ ت$$

$$س^2 - ص^2 + ٢س ص ت = -٥ + ١٢ ت$$

وبتطبيق تساوى الأعداد نجد أن :

$$س^2 - ص^2 = -٥ \quad (١) \dots\dots$$

$$٢س ص = ١٢ \quad (٢) \dots\dots$$

وبتعويض ص = $\frac{6}{س}$ من المعادلة (٢) في المعادلة (١) ينتج

$$٥- = \frac{٣٦}{س} - ٢$$

$$٥- = \frac{٣٦}{س} - ٢$$

$$٠ = ٣٦ - ٢س$$

$$٠ = (٩ + ٢س) (٤ - ٢س)$$

لكن $٠ = ٩ + ٢س$ لا يوجد حل لهذه المعادلة لأن س عدد حقيقي .

$$\therefore ٠ = ٤ - ٢س \Leftrightarrow ٢ \pm = س$$

$$\text{فإذا كان } س = ٢ \text{ فإن } ص = \frac{٦}{٢} = ٣$$

$$\text{فإذا كان } س = ٢- \text{ فإن } ص = \frac{٦}{٢-} = ٣-$$

∴ جذرا العدد $٥- + ١٢$ ت هما

$٢ + ٣$ ت ، $٢- - ٣$ ت .

لندرس الآن كيفية إيجاد الجذور النونية للعدد المركب $ع = ر [جتا ه + ت جا ه]$ ، ولنفرض أنها ع . ، ع١ ، ع٢ ، ، ع١- حيث :

$$ع١ = ر١ [جتا ه١ + ت جا ه١]$$

$$ع٢ = ر٢ [جتا ه٢ + ت جا ه٢] ، ، ع١- = ر١- [جتا ه١- + ت جا ه١-]$$

لنبدأ بـ ع . ع . تحقق ع١ = ع أي أن :

$$ر١ [جتا ه١ + ت جا ه١] = ر [جتا ه + ت جا ه]$$

أي أن :

$$[ر١، ه١] = [ر، ه]$$

$$\therefore \text{ر.} = \frac{1}{\text{ر}^{\text{ن}}} = \text{ه.} ، \frac{\text{ه.}}{\text{ن}} = \text{عليه فإن :}$$

$$\text{ع.} = \frac{1}{\text{ر}^{\text{ن}}} [\text{جتا} \frac{\text{ه.}}{\text{ن}} + \text{ت جا} \frac{\text{ه.}}{\text{ن}}]$$

$$\begin{aligned} \text{لإيجاد ع.} \text{ نأخذ } \text{ع} = \text{ر} [\text{جتا} (\pi^2 + \text{ه.}) + \text{ت جا} (\pi^2 + \text{ه.})] \\ \text{أو } \text{ر}^{\text{ن}} = [\text{جتان ه.} + \text{ت جان ه.}] \text{ر} = [\text{جتا} (\pi^2 + \text{ه.}) + \text{ت جا} (\pi^2 + \text{ه.})] \\ \text{أو } [\text{ر}^{\text{ن}} ، \text{ن ه.}] = [\text{ر} ، \pi^2 + \text{ه.}] \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ر.} = \text{ر.}^{\frac{1}{\text{ن}}} = \text{ه.} ، \frac{\pi^2 + \text{ه.}}{\text{ن}} = \text{عليه فإن :}$$

$$\text{ر.} = \frac{1}{\text{ر}^{\text{ن}}} [\text{جتا} \frac{\pi^2 + \text{ه.}}{\text{ن}} + \text{ت جا} \frac{\pi^2 + \text{ه.}}{\text{ن}}]$$

$$\begin{aligned} \text{أما بالنسبة لـ ع.}^2 \text{ وبأخذ } \text{ع} = \text{ر} [\text{جتا} (\pi^2 \times 2 + \text{ه.}) + \\ \text{ت جا} (\pi^2 \times 2 + \text{ه.})] ، \text{ وبإتباع نفس الخطوات السابقة نحصل على :} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ع.}^2 = \frac{1}{\text{ر}^{\text{ن}}} [\text{جتا} \frac{\pi^2 \times 2 + \text{ه.}}{\text{ن}} + \text{ت جا} \frac{\pi^2 \times 2 + \text{ه.}}{\text{ن}}]$$

وبصورة عامة :

$$\text{ع.}^{\text{ك}} = \frac{1}{\text{ر}^{\text{ن}}} [\text{جتا} \frac{\pi^2 \times \text{ك} + \text{ه.}}{\text{ن}} + \text{ت جا} \frac{\pi^2 \times \text{ك} + \text{ه.}}{\text{ن}}]$$

$$\text{ك} = 0 ، 1 ، 2 ، \dots ، \text{ن} - 1 .$$

تجدد الإشارة هنا إلى أنه ليس هنالك أكثر من ن جذر لـ ع ، حتى لو استمررنا في زيادة ك إلى ما بعد ن - 1 ، فمثلاً إذا كان ك = ن فإن :

$$ع_n = \frac{1}{r_n} [\text{جتا } \frac{\pi n^2 + h}{n} + \text{ت جا } \frac{\pi n^2 + h}{n}]$$

$$= \frac{1}{r_n} [\text{جتا } (\pi^2 + \frac{h}{n}) + \text{ت جا } (\pi^2 + \frac{h}{n})] \dots (2)$$

$$ع_n = \frac{1}{r_n} [\text{جتا } \frac{h}{n} + \text{ت جا } \frac{h}{n}] = ع.$$

وبالمثل :

$$ع_{n+1} = ع_1 \text{ وهكذا .}$$

مثال (3) :

جد الجذرين التربيعين للعدد ت

الحل :

$$ت = [\frac{\pi}{4} , 1] = 1 (\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4})$$

$$\therefore \sqrt{ت} = \text{جتا } \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \text{ك} + \text{ت جا } \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \text{ك}$$

وبوضع ك = 0 ثم ك = 1 نجد أن الجذرين هما :

$$\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4} , \text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4}$$

أي :

$$ت \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} , - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} ت$$

مثال (4) :

$$\text{جد الجذور التكعيبية للعدد } ع = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} ت$$

الحل :

$$\frac{(\sqrt{2} + 1) \sqrt{2} \cdot 8}{2} = \frac{(\sqrt{2} + 1) \sqrt{2} \cdot 8}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} \cdot 8}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\sqrt{2} \cdot 4 + \sqrt{2} \cdot 4 =$$

$$8 = \sqrt{64} = \sqrt{32 + 32} = \therefore$$

$$\begin{aligned} \text{أ} \quad \sqrt{2} \cdot 4 &= \text{ب} \quad \sqrt{2} \cdot 4 = \text{ظاه} = 1 \\ \therefore \text{ه} &= 45^\circ \end{aligned}$$

$$\text{ع} = 8 \quad (\text{جتا } 45^\circ + \text{تجا } 45^\circ)$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{1}{3} (\text{جتا } 45^\circ + \text{تجا } 45^\circ + \text{ك } 360^\circ + \text{تجا } 45^\circ + \text{ك } 360^\circ)$$

للمعادلة ثلاثة جذور ع. ، ع_١ ، ع_٢ تنتج بتعويض ك = ٠ ، ١ ، ٢

$$\text{ع} = 2 \quad (\text{جتا } 15^\circ + \text{تجا } 15^\circ)$$

$$\text{ع} = 1 \quad (\text{جتا } 360^\circ + \text{تجا } 360^\circ + \text{ك } 45^\circ + \text{تجا } 360^\circ + \text{ك } 45^\circ)$$

$$2 = (\text{جتا } 135^\circ + \text{تجا } 135^\circ)$$

$$\text{ع} = 2 \quad (\text{جتا } 45^\circ + \text{تجا } 45^\circ + \text{ك } 720^\circ + \text{تجا } 45^\circ + \text{ك } 720^\circ)$$

$$2 = (\text{جتا } 255^\circ + \text{تجا } 255^\circ)$$

$\therefore$ جذور المعادلة هي :

$$2 \quad (\text{جتا } 15^\circ + \text{تجا } 15^\circ) , \quad 2 \quad (\text{جتا } 135^\circ + \text{تجا } 135^\circ) ,$$

$$2 \quad (\text{جتا } 255^\circ + \text{تجا } 255^\circ)$$

مثال (٥) :

جد جذور المعادلة : $ع^٤ + ت + ع = ٠$

الحل :

$$ع^٤ + ت + ع = ٠ \quad \therefore ع (ع^٣ + ١) + ت = ٠$$

أما $ع = ٠$ وهو احد الجذور أو $ع^٣ = -١$ ت

$\therefore$ الجذور الأخرى هي الجذور التكعيبية للعدد -١ ت

$\therefore$ في العدد -١ ت ، $أ = ٠$ ، $ب = -١$ ، $هـ = ٢٧٠^\circ$

$\therefore ع^٣ = جتا ٢٧٠^\circ + ت جا ٢٧٠^\circ$

$$\frac{1}{3} \left(ع^٣ = جتا (٢٧٠^\circ + ٣٦٠^\circ ك) + ت جا (٢٧٠^\circ + ٣٦٠^\circ ك) \right) \Leftarrow ع ك$$

$$= جتا \frac{٢٧٠^\circ + ٣٦٠^\circ ك}{٣} + ت جا \frac{٢٧٠^\circ + ٣٦٠^\circ ك}{٣}$$

بوضع $ك = ٠$

ع. $جتا ٩٠^\circ + ت جا ٩٠^\circ = ٠$

$$بوضع ك = ١ ، ع = جتا \frac{٢٧٠^\circ + ٣٦٠^\circ}{٣} + ت جا \frac{٢٧٠^\circ + ٣٦٠^\circ}{٣}$$

$$= جتا ٢١٠^\circ + ت جا ٢١٠^\circ$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} ت$$

وبوضع $ك = ٢$

$$ع = جتا \frac{٢٧٠^\circ + ٧٢٠^\circ}{٣} + ت جا \frac{٢٧٠^\circ + ٧٢٠^\circ}{٣}$$

$$= جتا ٣٣٠^\circ + ت جا ٣٣٠^\circ$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} ت$$

∴ جذور المعادلة هي :

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10, \quad 11, \quad 12, \quad 13, \quad 14, \quad 15, \quad 16, \quad 17, \quad 18, \quad 19, \quad 20, \quad 21, \quad 22, \quad 23, \quad 24, \quad 25, \quad 26, \quad 27, \quad 28, \quad 29, \quad 30, \quad 31, \quad 32, \quad 33, \quad 34, \quad 35, \quad 36, \quad 37, \quad 38, \quad 39, \quad 40, \quad 41, \quad 42, \quad 43, \quad 44, \quad 45, \quad 46, \quad 47, \quad 48, \quad 49, \quad 50, \quad 51, \quad 52, \quad 53, \quad 54, \quad 55, \quad 56, \quad 57, \quad 58, \quad 59, \quad 60, \quad 61, \quad 62, \quad 63, \quad 64, \quad 65, \quad 66, \quad 67, \quad 68, \quad 69, \quad 70, \quad 71, \quad 72, \quad 73, \quad 74, \quad 75, \quad 76, \quad 77, \quad 78, \quad 79, \quad 80, \quad 81, \quad 82, \quad 83, \quad 84, \quad 85, \quad 86, \quad 87, \quad 88, \quad 89, \quad 90, \quad 91, \quad 92, \quad 93, \quad 94, \quad 95, \quad 96, \quad 97, \quad 98, \quad 99, \quad 100$$

تمرين (٧ - ٤)

(١) جد الجذور التربيعية للأعداد المركبة التالية :

$$(أ) \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad (ب) \quad 12 - 5 \quad (ج) \quad 8 + 4\sqrt{5} \quad (د) \quad 3 + \sqrt{3} \quad (هـ) \quad 3 + \sqrt{3}$$

(٢) احسب الجذور التكعيبية للعدد ٢ .

(٣) جد الجذور التكعيبية للعدد ٢ - ٢ - ٢ .

(٤) جد كلاً من الجذور التالية ومثلها بيانياً :

$$\frac{1}{4} \quad (ب) \quad (2 - \sqrt{3}) \quad (ج) \quad (2 - \sqrt{3}) \quad (د) \quad (2 - \sqrt{3})$$

$$(٥) \quad \text{احسب قيمتي } \frac{3}{2} \quad (ب) \quad (2 - \sqrt{3}) \quad (ج) \quad (2 - \sqrt{3}) \quad (د) \quad (2 - \sqrt{3})$$

(٦) في كل حالة جد جذور الأعداد المركبة المعطاة :

$$(أ) \quad 8 \quad (ب) \quad (1 - \sqrt{3}) \quad (ج) \quad (2 - \sqrt{3}) \quad (د) \quad (2 - \sqrt{3})$$

(٧) حل المعادلة $z^3 + 1 = 0$.

(٨) جد الجذور الثلاثة للمعادلة :

$$(1 - z)^3 = 8 + 8z$$

$$(٩) \text{ جد جذور المعادلة : } ع^٣ = \frac{١ - ت}{١ + ت}$$

$$(١٠) \text{ إذا كان } ع^٥ = \sqrt[٢]{٢} + \sqrt[٢]{٦} \text{ ت جد قيم ع الخمسة بالصورة القطبية .}$$

(٧ - ٥) حل معادلات الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد المركبة:

عرفنا فيما سبق أن لمعادلة الدرجة الثانية : $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ حلين مختلفين في مجموعة الأعداد الحقيقية ، أو حلاً مضاعفاً يتساوى فيه الجذران ، أو لا يكون لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية وذلك حسب قيمة $(ب^٢ - ٤ أ ج)$ موجباً أو صفراً أو سالباً إما إذا أردنا أن نحل المعادلة من الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد المركبة فإننا نلاحظ أنها قابلة للحل دائماً ؛ لأنه يمكن في هذه المجموعة إيجاد قيمه الجذر التربيعي للأعداد الموجبة والسالبة على السواء .

مثال (١) :

ليكن لدينا المعادلة :

$$ع^٢ - ٦ع + ١٣ = ٠$$

فإن حلها مستخدمين القانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية .

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ج}}{٢}$$

$$\therefore ع = \frac{-(-٦) \pm \sqrt{٦^٢ - ٤ \times ١ \times ١٣}}{٢}$$

$$= \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٥٢}}{٢}$$

$$\therefore ع = \frac{٦ \pm \sqrt{-١٦}}{٢} = ٣ \pm ٢ ت$$

وهما عددان مركبان مترافقان .

من المثال السابق نلاحظ أن حلى المعادلة $أ ع^2 + ب ع + ج = ٠$ والتي معاملاتها $أ ، ب ، ج$ أعداد حقيقية هما عددان مركبان مترافقان عندما يكون المميز سالباً .

ويمكن أن نخلص إلى أنّ لمعادلة الدرجة الثانية ذات المعاملات الحقيقية جذرين حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجباً ، وجذرين مركبين مترافقين إذا كان المميز سالباً ، وجذرين متساويين إذا كان المميز صفراً .

مثال (٢) :

حل المعادلة :

$$ع^2 = ٨ + ٠$$

الحل :

$$ع^2 = ٨ + ٠ \Leftrightarrow (ع + ٢) (ع - ٢ + ٤) = ٠$$

∴ أما $ع + ٢ = ٠$ أي $ع = -٢$ وهذا أحد الجذور

$$أو ع^2 - ٢ + ٤ = ٠$$

$$\therefore ع = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times ٤}}{٢} = \frac{-٢ \pm \sqrt{١٢-١}}{٢}$$

$$= ١ \pm \sqrt{٣} ت$$

∴ جذور المعادلة هي :

$$-٢ ، ١ + \sqrt{٣} ت ، ١ - \sqrt{٣} ت$$

مثال (٣) :

حل المعادلة :

$$٠ = (٣ - ت) + ع + (٥ - ت)$$

الحل :

$$\text{نلاحظ أن : } ١ = أ ، ٣ - ت = ب ، ٥ - ت = ج ،$$

$$\therefore ع = \frac{-(٣ - ت) \pm \sqrt{(٣ - ت)^2 - ١ \times (٥ - ت)}}{٢}$$

$$= \frac{-(٣ - ت) \pm \sqrt{(٣ - ت)^2 - ١٥ + ٨ ت}}{٢}$$

ولا يجاد $\sqrt{(٣ - ت)^2 - ١٥ + ٨ ت}$ نفرض أن :

$$(س + ص ت) = \sqrt{(٣ - ت)^2 - ١٥ + ٨ ت}$$

$$\text{ومنه } ١٥ - = ص^٢ - ٢ ص ت$$

$$٨ - = ص ت$$

$$\therefore ص = \frac{٤ -}{س}$$

$$\therefore ١٥ - = \frac{١٦}{س} - ٢ س$$

$$س^٤ - ١٦ = ١٥ س - ٢ س^٢ \Leftrightarrow س^٤ + ٢ س^٢ - ١٦ = ٠$$

$$\Leftrightarrow (س^٢ + ١٦) (س^٢ - ١) = ٠$$

$$\Leftrightarrow س^٢ - ١ = ٠ \Leftrightarrow س = \pm ١$$

$$\therefore ص = \mp ٤ \text{ (إشارة س تخالف إشارة ص لأن } ٢ س ص \text{ سالباً)}$$

$$\therefore \text{الجذران التربيعيان للمقدار } ٨ - ١٥ ت \text{ هما } \pm (١ - ٤ ت) \text{ ومنه}$$

$$ع = \frac{(٢ - ٣ ت) \pm (١ - ٤ ت)}{٢}$$

$$ع = ٣ - ٢ ت \quad \text{أو} \quad ع = ١ + ت$$

لاحظ أن الجذرين غير مترافقين ؛ لأن المعادلة التربيعية معاملاتها غير حقيقية.

مثال (٤) :

ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها ٣ + ٢ ت؟

الحل :

بما أن المعادلة تربيعية ذات معاملات حقيقية و ٣ + ٢ ت أحد جذريها

∴ ٣ - ٢ ت الجذر الآخر .

نفرض أن المعادلة هي ٢ع + ب + ع + ج = ٠

$$\therefore ب = - \text{مجموع الجذرين} = - (٣ + ٢ ت + ٣ - ٢ ت) = -٦$$

$$ج = \text{حاصل ضرب الجذرين} = (٣ + ٢ ت) (٣ - ٢ ت) = ٩ - ٤ = ١٣$$

$$\therefore \text{المعادلة} = ٢ع - ٦ + ع + ١٣ = ٠$$

تمرين (٧ - ٥)

(١) حل المعادلات التالية :

$$(أ) \quad ٤ ع^٢ - ١٢ ع + ١٣ = ٠$$

$$(ب) \quad ٤ ع^٢ - ٤ ع + ٧ = ٠$$

$$(ج) \quad ٤ ع^٢ - (٥ + ٧ ت) ع + (٦ - ١٧ ت) = ٠$$

$$(د) \quad ٤ ع^٢ + ٢٥ = ٠$$

$$(هـ) \quad ٢ ت - ٣ ع + ٣ = ٠$$

(٢) جد بقية جذور المعادلة $٤ ع^٢ + ١٦ ع + ١٦ = ٠$ علماً بأن :

$$١ + ٣١ ت جذراً لها .$$

(٣) ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها هو :

$$(أ) \quad ٢ - ٣١ ت \quad (ب) \quad ٥ + ت \quad (ج) \quad \frac{٤ - ٣١ ت}{٥}$$

(٤) جد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة .

$$(١ + ٤ ت) ع^٢ + (٥ - ٣ ت) ع + (٨ - ٢ ت) = ٠$$

(٥) تحقق أن ٣ ت جذراً للمعادلة : $٣ ع^٣ + ٧ ع^٢ + ٢٧ ع + ٦٣ = ٠$

ثم جد باقي الجذور .

(٧ - ٦) الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

سبق أن عرفنا أنه لأي عدد حقيقي $أ$ يوجد جذر تكعيبي حقيقي واحد يحقق المعادلة $ع^٣ = أ$ ويكتب على الصورة $\sqrt[٣]{أ}$. أما في مجموعة الأعداد المركبة فسنجد أن هناك ثلاثة جذور تكعيبية للعدد الحقيقي .

وسنتناول أولاً الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أي حلول المعادلة

$$ع^٣ = ١ \quad \text{أو} \quad ع^٣ = -١$$

وبتحليل الطرف الأيمن نحصل على :

$$(١ - ع) (١ + ع + ع^٢) = ٠ \quad \text{فيكون :}$$

$$\text{إما } ع = ١ \quad \text{ومن هنا } ع = ١$$

$$\text{أو } ع^٢ + ع + ١ = ٠$$

ومنها $\epsilon = \frac{\sqrt[3]{-1} \pm \sqrt[3]{1}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \epsilon$.
 الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي :

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \epsilon, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \epsilon$$

تلاحظ أن أحد الجذور حقيقي والآخرين عدنان مركبان مترافقان .
 فإذا رمزنا لأحد الجذرين المركبين بالرمز ω (أوميقا) فإن الجذر
 الآخر يكون ω^2 إذ أن مربع أي منها يساوى الآخر ويمكنك التحقق من ذلك
 ولذلك يمكن كتابة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح على الصورة :
 $1, \omega, \omega^2$ وهذه الجذور تحقق الخاصيتين :

$$(1) \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0$$

$$(2) \quad \omega^3 = 1$$

وبصورة عامة :

إذا كان α عدداً حقيقياً فإن الجذور التكعيبية للعدد α هي :

$\sqrt[3]{\alpha}, \quad \omega \sqrt[3]{\alpha}, \quad \omega^2 \sqrt[3]{\alpha}$
 ويمكنك التحقق من أن كل جذر من هذه الجذور هو حل للمعادلة $\epsilon^3 = \alpha$.

مثال (1) : جد الجذور التكعيبية للعددين ٨ ، -١
 الحل :

$$\text{بما أن } \sqrt[3]{8} = 2$$

فإن الجذور التكعيبية للعدد ٨ هي :

$$2, \quad \omega 2, \quad \omega^2 2$$

وبما أن $\sqrt[3]{-1} = -1$ فإن الجذور التكعيبية للعدد -١ هي :

$$-1, \quad -\omega, \quad -\omega^2$$

مثال (٢) :

أحسب ω^{32} ، ω^{41}

الحل :

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega^{1 \cdot 1} = \omega^{1 \cdot (\omega^3)} = \omega^{1 \cdot \omega^3} = \omega^{32} \\ \omega &= \omega^{1 \cdot 1} = \omega^{1 \cdot (\omega^4)} = \omega^{1 \cdot \omega^4} = \omega^{41}\end{aligned}$$

وبصورة عامة :

$$\omega^r = \omega^{r \cdot n}$$

حيث n عدد صحيح ، $r = 0, 1, 2$

مثال (٣) :

اثبت أن :

$$\xi = (\omega^4 - \omega^2 + 1) (\omega^4 + \omega^2 - 1)$$

الحل :

الطرف الأيمن :

$$\begin{aligned}& (\omega^4 - \omega^2 + 1) (\omega^4 + \omega^2 - 1) \\&= (\omega^4 - \omega^2 + 1) (\omega^4 - \omega^2 + 1) \quad (\text{لأن } \omega^4 = \omega) \\&= (\omega^4 - \omega^2 + 1) (\omega^4 - \omega^2 + 1) \\&= (\omega^4 - \omega^2 - 1) (\omega^4 - \omega^2 - 1) \\&\text{لأن } \omega^4 - \omega^2 = \omega + 1, \omega^4 - \omega^2 = \omega + 1 \\&1 \times \xi = \omega^4 \xi = (\omega^4 - \omega^2 - 1) (\omega^4 - \omega^2 - 1) \\&= \xi \quad \text{الطرف الأيسر}\end{aligned}$$

تمرين (٧ - ٦)

- (١) احسب الجذور التكعيبية للأعداد التالية :
 أ. ٢٧ ب. ١٢٥ ج. $\frac{1}{8}$
 (٢) اكتب المقادير التالية في أبسط صورة :
 أ. ω^5 ب. ω^{14} ج. $\frac{1}{(\omega + 1)^2}$

(٣) اثبت أن :

أ. $1 = (\omega + 1)(\omega^2 + 1)$
 ب. $1 - \omega = (\omega + 1)^3$
 ج. $\omega^2 = (\omega + 1)^{-4}$

(٤) احسب مجموع :

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{14}$$

(٥) جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها ω .

(٦) احسب قيمة المقدار :

$$(1 + \omega + \omega^2)(1 + \omega^4 + \omega^8)$$

(٧) جد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح مستخدماً الصورة القطبية وعينها على المستوى المركب .

(٨) جد قيمة :

$$(\omega^2 + \omega^5 + \omega^8)^3$$

(٩) برهن أن :

$$\begin{aligned} \text{أ. } 1 &= (\omega^2 + 1) \left(\frac{1}{\omega} + 1 \right) \left(\frac{1}{\omega} + 1 \right) (\omega + 1) \\ \text{ب. } 6 &= (\omega^2 + 1) (\omega^2 - 1) (\omega - 1) \end{aligned}$$

تمرين عام (٧ - ٧)

(١) باستخدام نظرية دي مويفر احسب :

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{16}$$

(٢) إذا كان $\omega^6 = -1 + i$ ، جد المعادلة التي جذراها ω ، $\frac{1}{\omega}$

(٣) جد جذري المعادلة $\omega^6 + t = 0$ صفر حيث ω عدد مركب .

(٤) اكتب كلاً من العددين التاليين في الصورة القطبية :

$$\omega^6 = 1 + i\sqrt{3} \quad \omega^{18} = (1 + i\sqrt{3})^3$$

(٥) ليكن $\omega^6 = 1 + i\sqrt{3}$. اكتب الجذور التكعيبية للعدد ω وبين أن مجموعها يساوي الصفر .

(٦) جد قيمة كل من الأعداد الحقيقية s ، v التي تحقق المعادلة :

$$1 + t = \frac{1}{s + vt} + \left[\frac{t + 1}{t - 1} \right]^2$$

(٧) إذا كان $\omega^6 = 1 + i\sqrt{3}$ ، جد قيمة كل من ω ، ω^2

(٨) جد الجذر التربيعي للمقدار $2 + 2\sqrt{3}$ ت

(٩) ضع المقدار المركب $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ في الصورة أ + ب ت

(١٠) جد $\sqrt{4-3}$ ت

(١١) أثبت أن :

أ. $(1 + \cos \theta + \cos \theta)^n + (1 + \cos \theta - \cos \theta)^n$

$$= \frac{2^n}{2} \cos^n \theta$$

ب. $\cos^n \theta + \cos^{n+1} \theta = \frac{\pi}{3} \cos^n \theta$

حيث أ ، ب جذرا المعادلة $x^2 - 2x + 4 = 0$